

インタラクティブシステム論 第10回

梶本裕之



日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	4/9	イントロダクション	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	4/16
		Scilab課題	[📄 pdf] 2020年版		↑
		上記資料のPython版	[📄 pdf] 2020年版		↑
2	4/16	フーリエ変換	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	4/23
3	4/23	フーリエ変換と線形システム	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	4/30
4	4/30	信号処理の基礎	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	5/7
5	5/7	信号処理の応用1(相關)	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	5/14
6	5/14	信号処理の応用2(画像処理)	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	5/21
-	5/21	中間確認テスト準備(自習)	[📄 pdf] 2020年版		
-	5/28	中間確認テスト(現在は大学を予定)	[📄 pdf] 2020年版		
7	6/4	ラプラス変換	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	6/11
8	6/11	古典制御の基礎	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	6/18
9	6/18	行列	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	6/25
10	6/25	行列と最小二乗法	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	7/2
11	7/2	ロボティクス	[📄 pdf] 2020年版	video 🗣️	7/9
-	7/9	期末テスト準備(自習)	[📄 pdf] 2020年版		
-	7/16	期末確認テスト(現在は大学を予定)			

日程およびテストを
大学で行うかについ
ては、**随時Google
Classroom**や授業の
ページを見てください。



(復習) 行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(例1)

y:観測データ, A:システムの性質, x:媒介変数

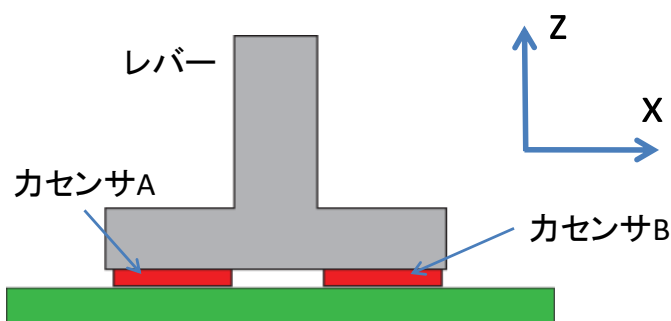
(例2)

y:フーリエ空間での周波数成分, A:フーリエ変換行列,

x:実空間でのデータ系列



(復習) (例) 2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$

$$F_X = k(x_A - x_B)$$

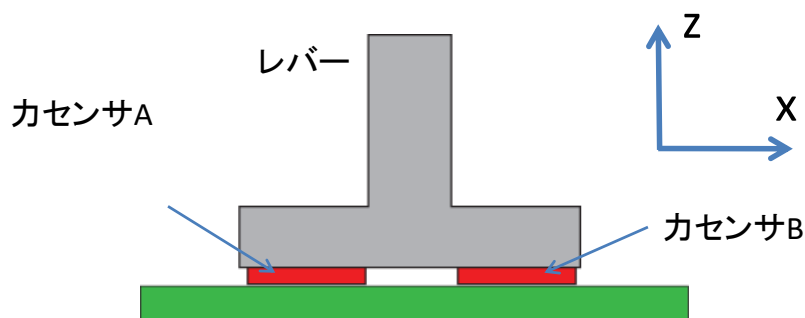


$$2 \times 1 \text{ベクトル} \left\{ \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \right\} 2 \times 1 \text{ベクトル}$$

2x2行列



(復習) カセンサのキャリブレーション (校正)



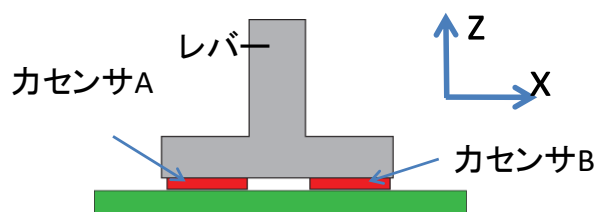
$$\begin{aligned} F_Z &= k_1 x_A + k_2 x_B \\ F_X &= k_3 x_A + k_4 x_B \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1~k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない!!



(復習) 逆行列

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$



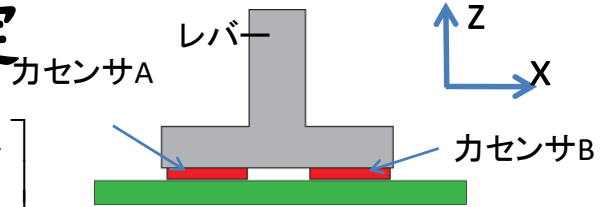
これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(復習) 逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) $F_z=1, F_x=0$ の力を加え, 各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$



各センサの出力に, 逆行列の成分 g_1, g_3 が現れる!

(2) $F_z=0, F_x=1$ の力を加え, 各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$



各センサの出力に, 逆行列の成分 g_2, g_4 が現れる!

(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}$ の成分, $g_1 \sim g_4$ が得られたので, その逆行列を計算すれば \mathbf{A} が得られる.



$$\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$$

まとめると,

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当



(復習) 単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

1回目の入力 1回目の出力
2回目の入力 2回目の出力



$$GF = M$$

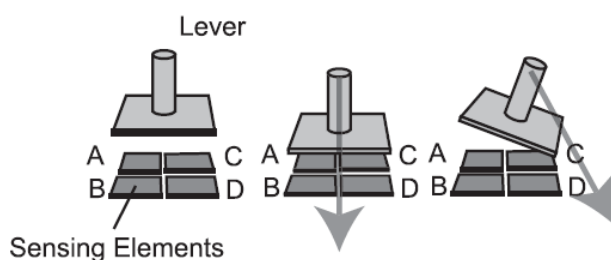
$$G = MF^{-1}$$



1. 2回既知の力ベクトルを加えて、各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列F, センサ出力を並べたものを行列Mとする
3. 力行列の逆行列F⁻¹をMにかければ、行列Gが得られる。
4. Gの逆行列が望んだ較正行列A



(復習) 逆行列が使えない場合



$$\begin{aligned}
 F_z &= k_1(x_A + x_B + x_C + x_D) \\
 F_x &= k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D)) \\
 F_y &= k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3x4行列

一般には正方行列ではない！！

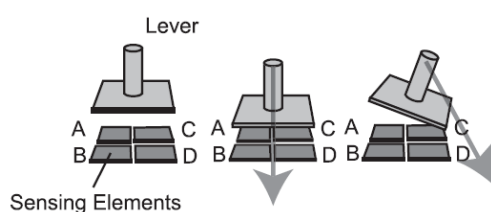
(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



行列と最小二乗法



本日の疑問



$$\begin{matrix} 3 \\ \left[\begin{array}{c} F_z \\ F_x \\ F_y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{array} \right] \\ 4 \end{matrix}$$

3x4行列

• 一般には正方行列ではない

• 「逆行列」は定義できず、
キャリブレーションもできないのでは



本日の解答

$$3 \left\{ \begin{matrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{matrix} \right\} 4$$

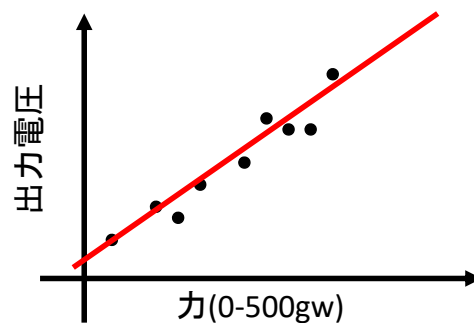
3x4行列

- 逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる.
- またこれは**最小二乗法**という、
工学全体を支える基礎的な考えである.

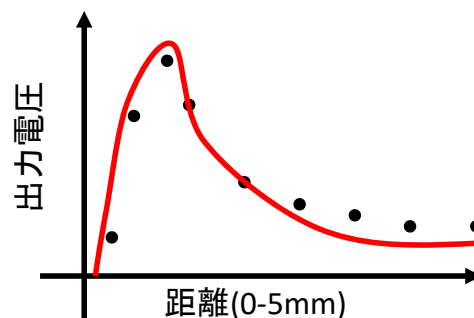
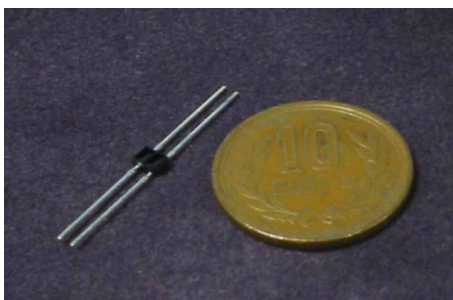


色々なセンサ

フィルム状力センサ



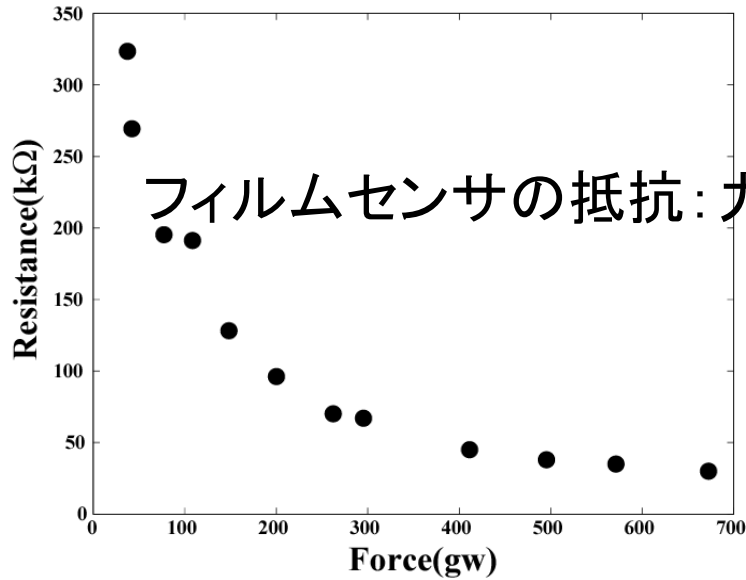
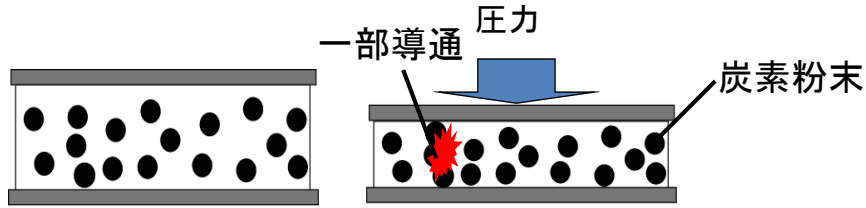
フトリフレクタを用いた近接距離センサ



いかにして校正曲線を求め、センサとして使えるようにするか？



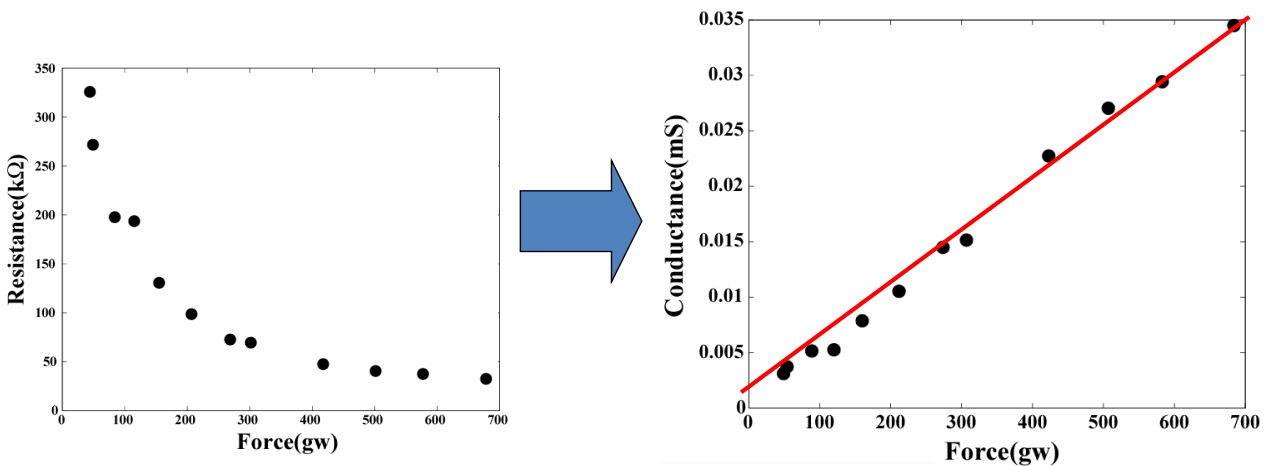
フィルムセンサの定式化 (1)



フィルムセンサの定式化 (2)



抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る



$$y = ax + b \quad \left\{ \begin{array}{l} x: \\ y: \\ a, b: \end{array} \right.$$

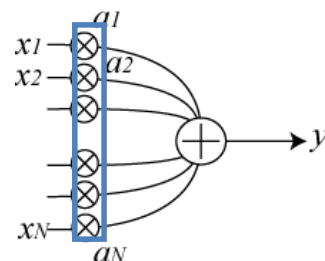
実験でなじみ深い「直線フィッティング」



一般化

$y = a_1x + a_2$ から一般化

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



N個の**既知入力** $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ と
 N個の**未知パラメータ** $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

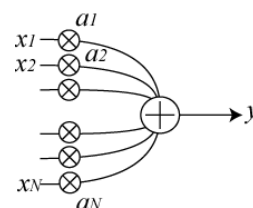
目的: N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の**同定**(identification)

取れる手段: 入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 =$

行列の形にする

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



入力を変化させ、M回の出力を得る

$$y_1 = a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_Nx_{1N}$$

$$y_2 = a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_Nx_{2N}$$

⋮

$$y_M = a_1x_{M1} + a_2x_{M2} + \dots + a_Nx_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{array} \right.$$

もし $M=N$ なら

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$$

実際には $M \neq N$ で \mathbf{X}^{-1} は存在しないことがほとんど

二乗誤差を最小化する（最小二乗法）

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

をaについて解くか.

$$\begin{cases} \mathbf{X}: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり, 式を完全に満たすベクトルaは, **無い**

(1)測定された出力ベクトルyが**誤差**を含んでいると仮定

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad \text{where } \mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_M]^T$$

(2)誤差の大きさが最小となるようなaをもっともらしいaとして受け入れよう.

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M][e_1, e_2, \dots, e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$



19

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad T \text{は転置.}$$

=

=

=

=

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$



20

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|e\|^2 = y^T y - 2y^T Xa + a^T X^T Xa$$

$$\|e\|^2 = a^2 x^2 - 2ayx + y^2$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \|e\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \|e\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \|e\|^2 \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial a_N} \|e\|^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \|e\|^2 =$$

=

=

=

$$\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} =$$

$$\mathbf{a}^T =$$

$$\mathbf{a} =$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^2 x^2 - 2ayx + y^2)$$

$$= 2x^2 a - 2yx$$

$$= 0$$

$$\therefore ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})^T = ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^T)^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$



21

擬似逆行列

結論: 未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

$\mathbf{X}^\#$: 擬似逆行列(Pseudo Inverse)



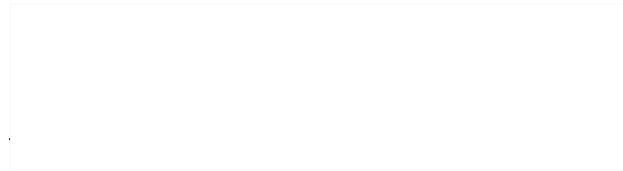
22

擬似逆行列は逆行列の拡張となっている

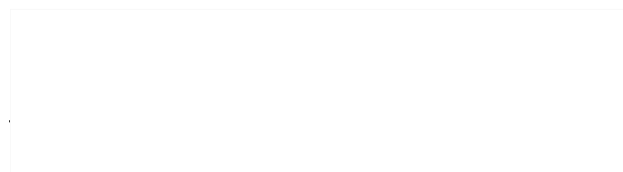
行列Xが正則な場合

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

=



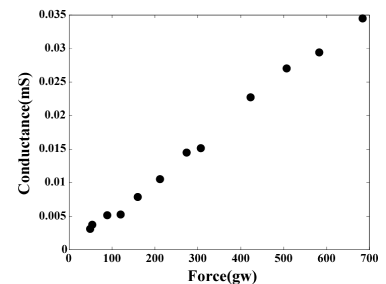
=



(再考) フィルムセンサの場合



$$y = a_1 x + a_2 \begin{cases} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス. 測定結果} \\ a_1, a_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$



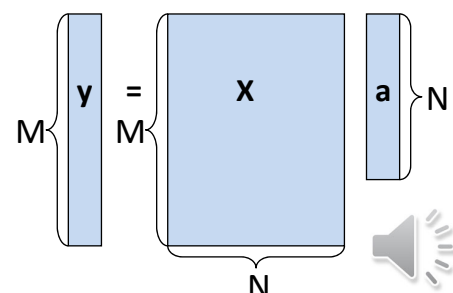
これは

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{where } x_2 = 1$$

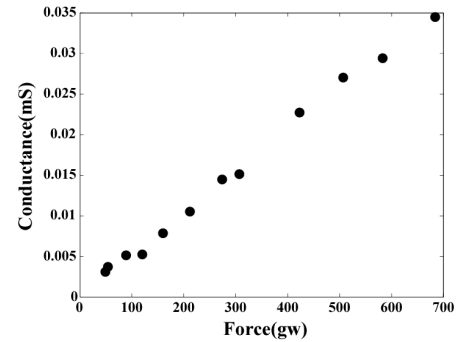
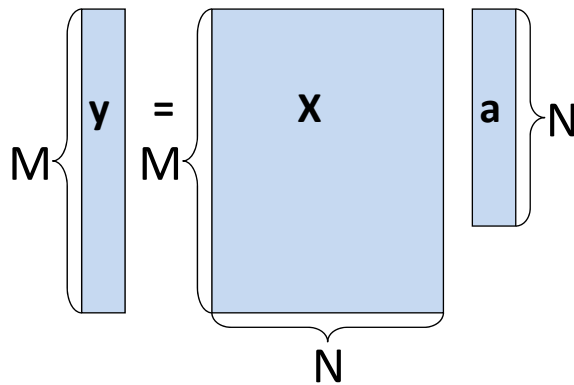
とみなせる.

加える力を変え, M回測定する(2回以上)

$$\begin{matrix} y_1 = a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 = a_1 x_{21} + a_2 1 \\ \vdots \\ y_M = a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



(再考) フィルムセンサの場合



よって,

$$a = X^{\#}y \quad \text{where} \quad X^{\#} = (X^T X)^{-1} X^T$$

により二つの未知パラメータを求めることができる。



手作業で求めてみる



$$a = X^{\#}y$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$

=

=

=

=

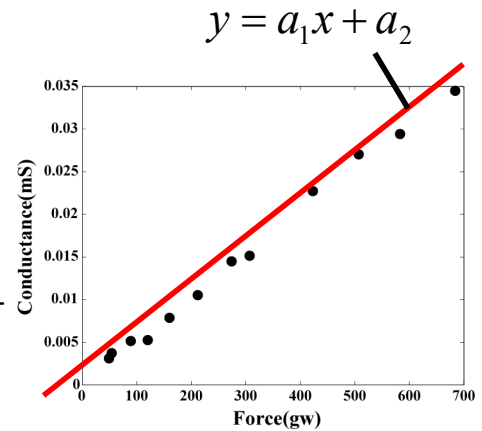


手作業で求めてみる



$$a_1 = \frac{M \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

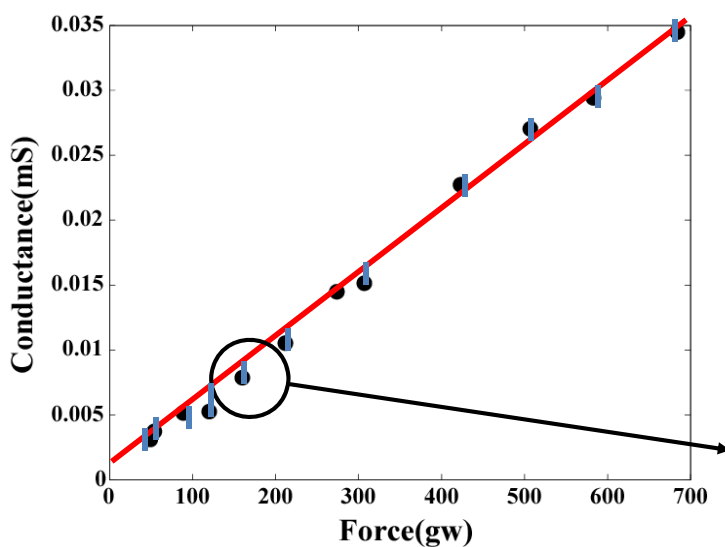
$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



これは、直線によるフィッティングの公式に他ならない



何を最小化したか



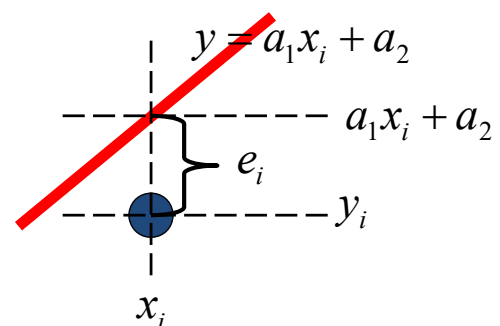
$$y = Xa + e$$

$$e = y - Xa$$

$$\|e\|^2 = e^* e = \sum_{i=1}^M e_i^2$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

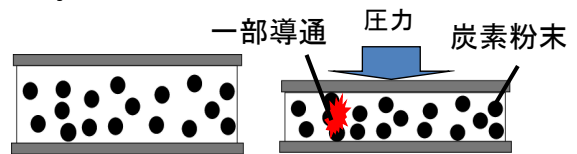
$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$



データと直線の、「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した。

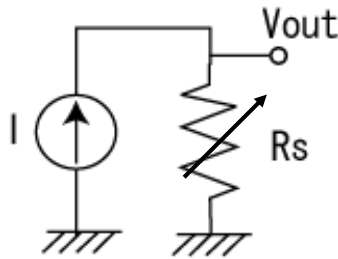


(参考) 実際の測定回路



- 「抵抗」を測定するなら

(a)



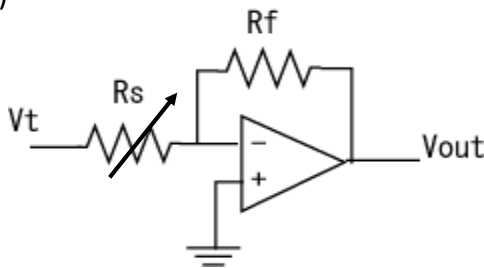
I: 定電流源
Vout: 出力

$$V_{out} = I \times R_s$$

出力電圧は**抵抗に比例**

- 「コンダクタンス(抵抗の逆数)」を測定するなら

(b)



Vt: 定電圧源
Rs: フィルムセンサの抵抗
Rf: 調整用固定抵抗

これは「反転増幅回路」

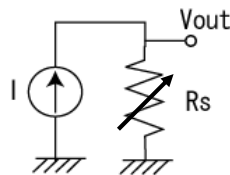
$$V_{out} = R_f / R_s \times V_t$$

Vtが一定なら出力電圧は**抵抗に反比例**

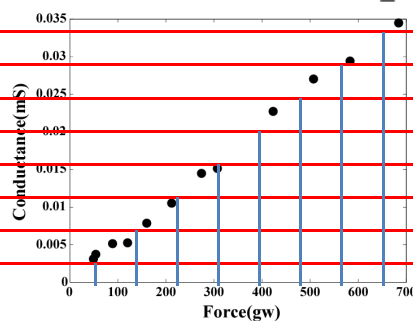
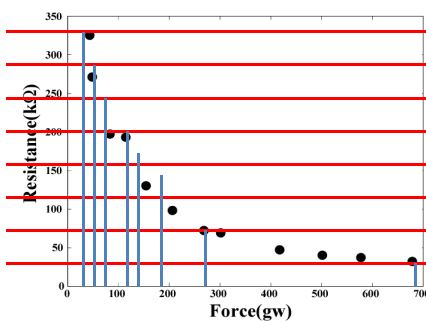
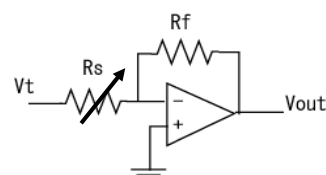
「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい。しかし良い設計ではない。

(a)出力は抵抗に比例



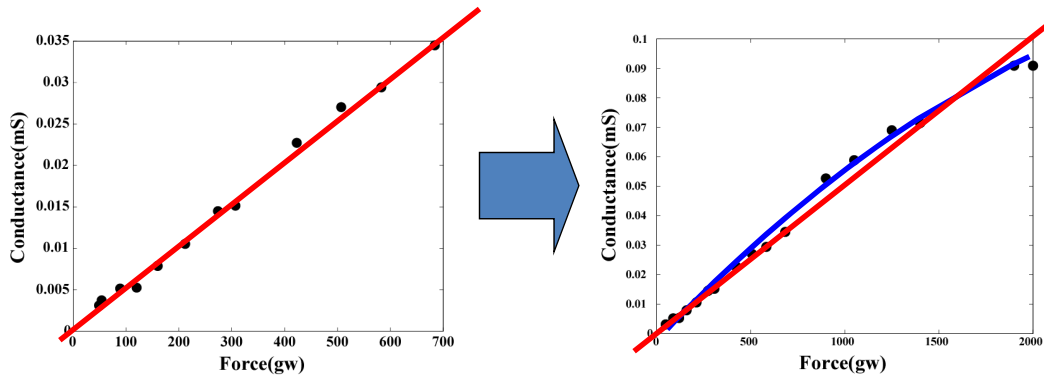
(b)出力はコンダクタンスに比例



ADボードによる量子化

- アナログ部による線形化の意義
=ADボードによる量子化の影響を低減
「**ダイナミックレンジを広げる**」とも言う。

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい。



直線近似 $y = a_1x + a_2$ ではフィッティングできない気が...

(直線領域だけで使う, という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる.

$$y = a_1x + a_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= a_1x^2 + a_2x + a_3 \\ y &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \end{aligned}$$

もはや直線フィッティングの公式は使えない。



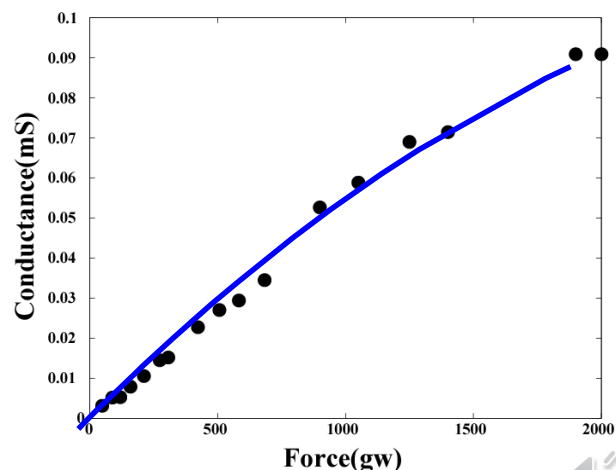
多項式近似



$$y = a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス. 測定出力} \\ a_1, a_2, a_3: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$$

何度も測定する

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3 \\ y_2 &= a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3 \end{aligned}$$



多項式近似



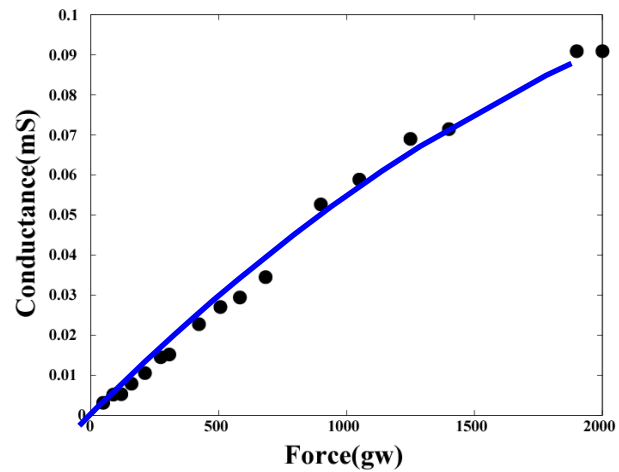
$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$y = \mathbf{Xa}$ の形に出来たので,

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y} \quad \text{where} \quad \mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

により3つの未知パラメータを求めることができる。(計算機のごと)



元に戻って. . . 何をしなかったか

(1) $y = a_1x + a_2$

x : 力: 既知の入力

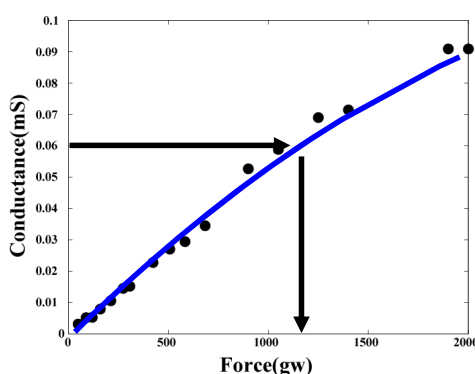
(2) $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$

y : コンダクタンス. 測定した出力

(3) $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

a_1, \dots, a_4 : 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない。
測定出力 y から力 x を逆算することがゴール。



(1) $x = (y - a_2) / a_1$

(2) $a_1x^2 + a_2x + (a_3 - y) = 0$

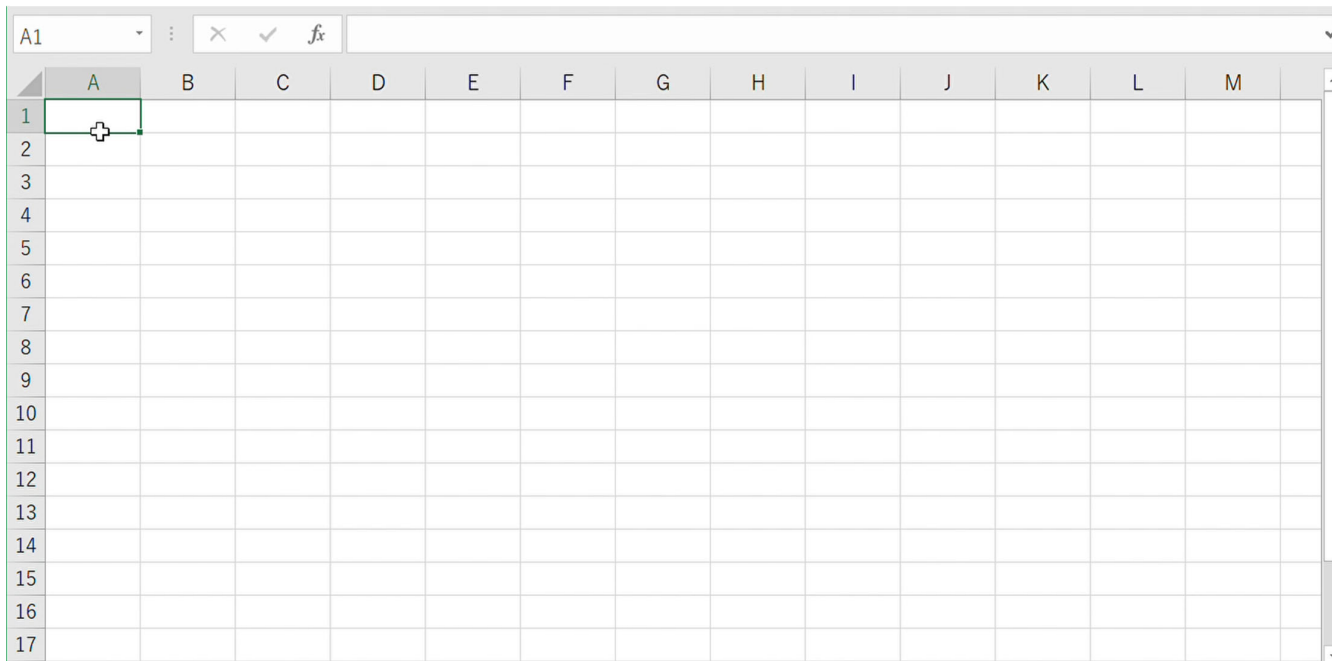
$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + (a_4 - y) = 0$

$x = \dots$ (3次方程式の解の公式)



デモ：Excelでのフィッティング



X軸は等間隔でなくて良いし、単調増加でなくて良い
N-1次多項式だと**完璧なフィッティング**になってしまうのはなぜ？(行列の形は?)



整数次数の多項式でなくて良い



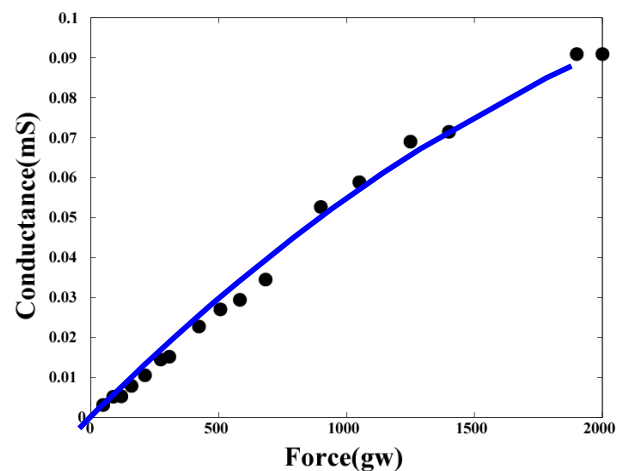
$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$

$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$

⋮

$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

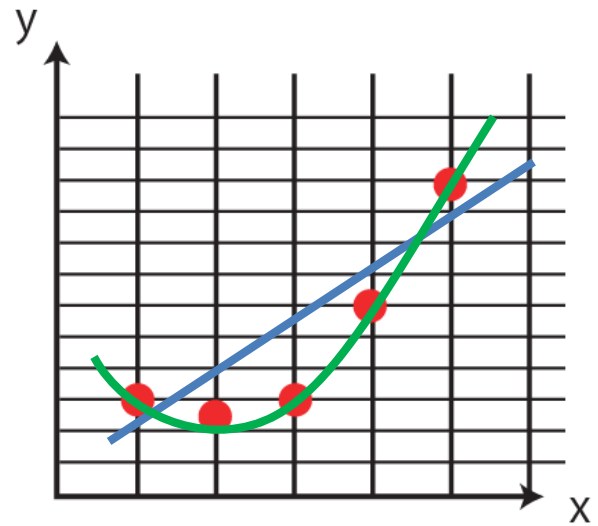


関数であっても良い。たとえばlog(x)など。



レポート課題(1)

次のデータ系列に対して、
Scilab/pythonを用いて、
(1) 直線による近似、
(2) 2次曲線による近似を適用、
パラメータを求め、
曲線とデータをグラフに描け



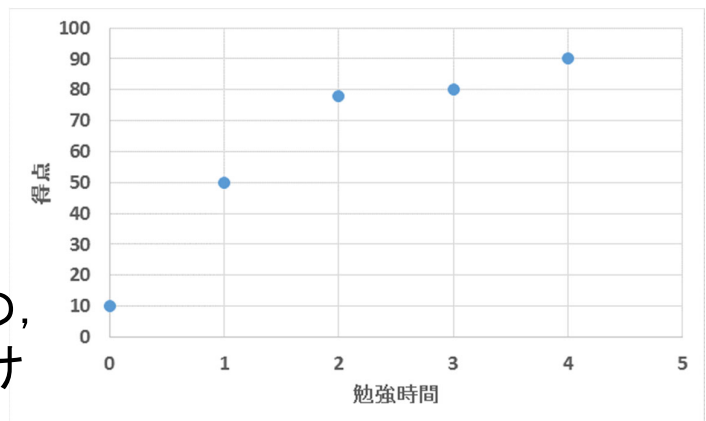
X	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる。
当然自分で $\text{inv}(A' * A) * A'$ とやっても同じ。



レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して、
 $y = a_1 * \log(x+1) + a_2$
を仮定してパラメータを求め、
曲線とデータをグラフに描け



	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X(勉強時間)	3	4	2	0	1
Y(試験の点)	80	90	78	10	45



最小二乗法 事例紹介

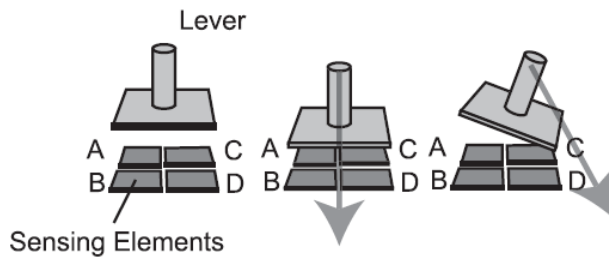


最小二乗法事例紹介

- 多軸センサのキャリブレーション
- 直交(同期)検波の最小二乗法による理解
- フォトリフレクタのキャリブレーション



応用事例（１）多軸力センサ



$$F_z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_x = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

$$F_y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$3 \left\{ \begin{matrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{matrix} \right\} 4$$

3x4行列

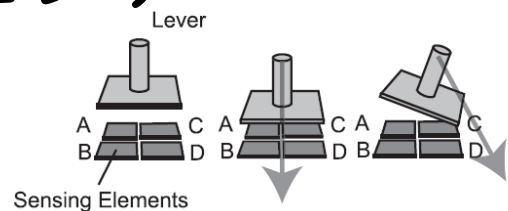
一般には正方行列ではない！！

(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



応用事例（１）多軸力センサ

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$



K1からk12までの係数を求める問題。

Fx, Fy, Fzとして既知の力を何度も方向を変えて加える。出力 x_A, x_B, x_C, x_D の組が毎回得られる。

$$F_z = [k_1 k_2 k_3 k_4] \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

一要素を取り出してみる

$$[F_{z1} F_{z2} \dots F_{zN}] = [k_1 k_2 k_3 k_4] \begin{bmatrix} x_{A1} & x_{A2} & \dots & x_{AN} \\ x_{B1} & x_{B2} & \dots & x_{BN} \\ x_{C1} & x_{C2} & \dots & x_{CN} \\ x_{D1} & x_{D2} & \dots & x_{DN} \end{bmatrix}$$

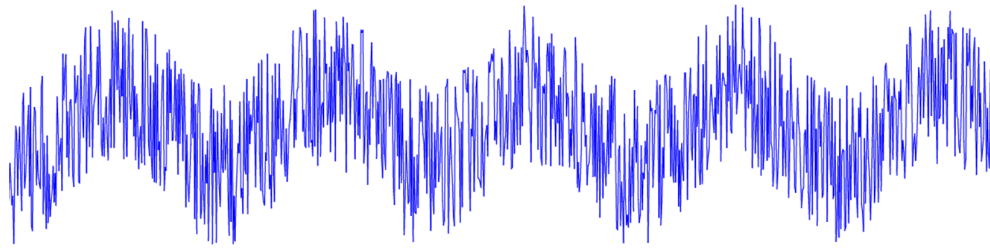
N回の計測を行う

$$\begin{bmatrix} x_{A1} & x_{B1} & x_{C1} & x_{D1} \\ x_{A2} & x_{B2} & x_{C2} & x_{D2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{AN} & x_{BN} & x_{CN} & x_{DN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{z2} \\ \vdots \\ F_{zN} \end{bmatrix}$$

擬似逆行列の計算により係数を求めることができる



応用事例(2)：直交（同期）検波



問題を定式化

信号 $f(t)$ が,

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)$$

と仮定できるとする。周波数 ω はわかっている。

計測データから、振幅 A と、位相ずれ ϕ を求めるには？ 

数式（復習）

信号に $\sin(\omega t)$ をかけ、積分する（＝内積をとる）
積分時間 T は充分長い。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T} \int_0^T (A\sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A\sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \text{noise}(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A(\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \sin(\omega t) dt \\ &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\ &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{A}{2} \cos(\phi) \end{aligned}$$



数式（復習）

信号に $\cos(\omega t)$ をかけ、積分する(=内積をとる)
積分時間 T は充分長い.

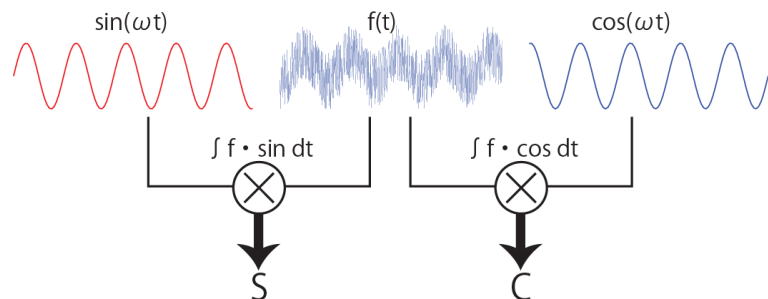
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt \\ &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \\ &= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{A}{2} \sin(\phi) \end{aligned}$$



直交（同期）検波：数式（復習）

$$S = \frac{A}{2} \cos(\phi)$$

$$C = \frac{A}{2} \sin(\phi)$$



位相差

$$\frac{C}{S} = \tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

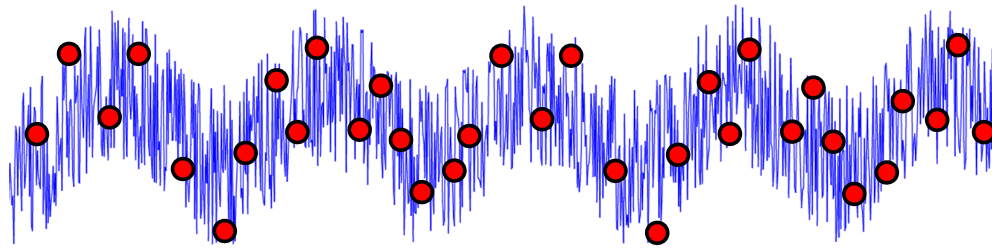
$$= \frac{A^2}{4}$$

$$A = 2\sqrt{S^2 + C^2}$$

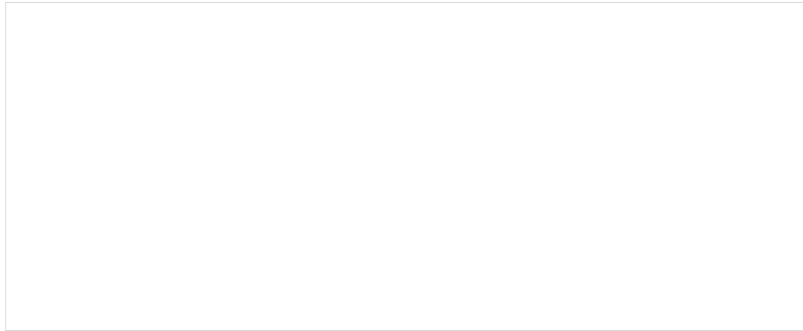


ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定



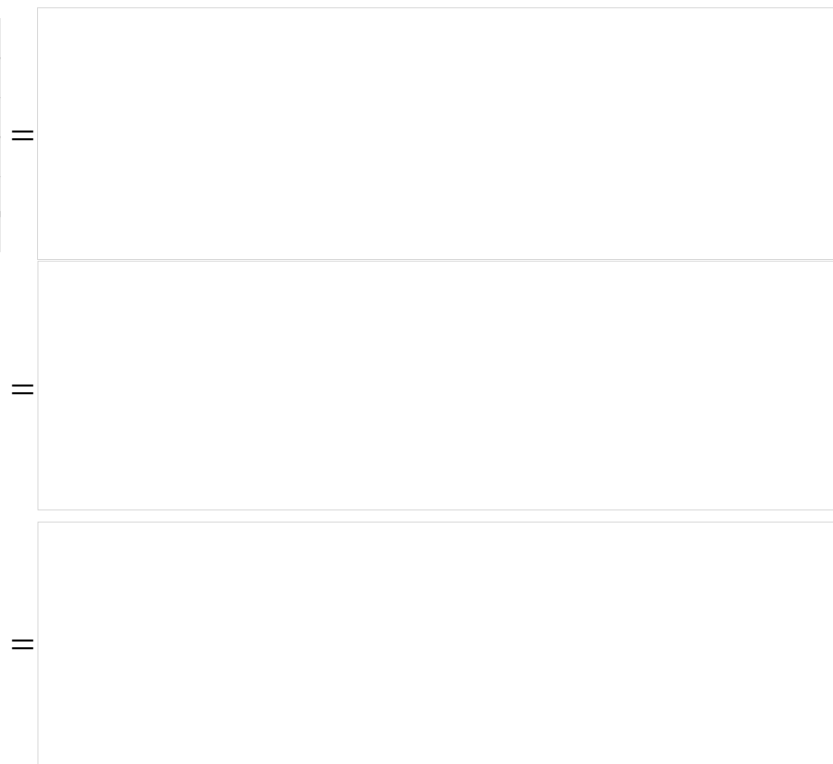
ただし周波数 ω は既知.

得られたデータ $[y_1, y_2, \dots, y_N]$ から, 振幅 A と位相 ϕ を求める.



最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$



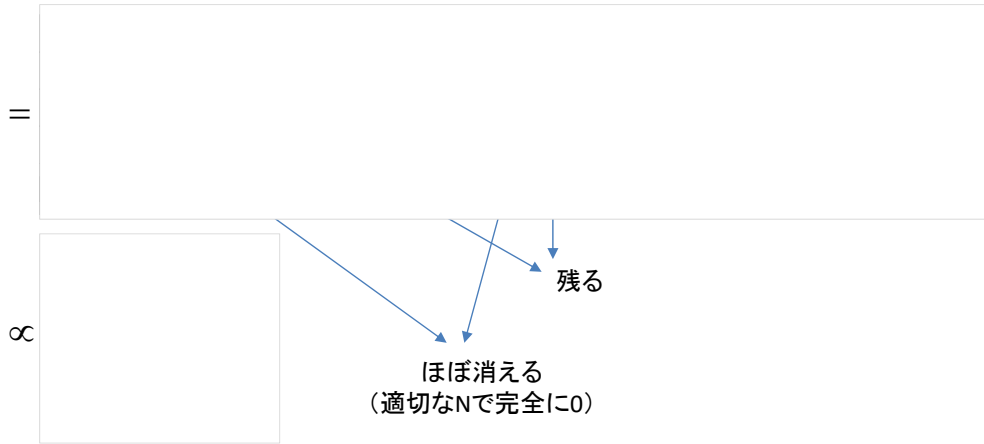
これにより, 行列の形, $y = \mathbf{Xa}$ に変形することが出来た.



最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A \cos(\phi) \\ A \sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$



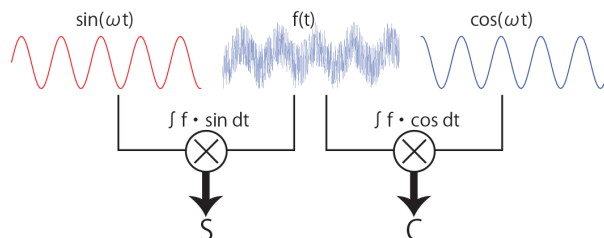
最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A \cos(\phi) \\ A \sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^N \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

つまり、元信号 $y(t)$ に

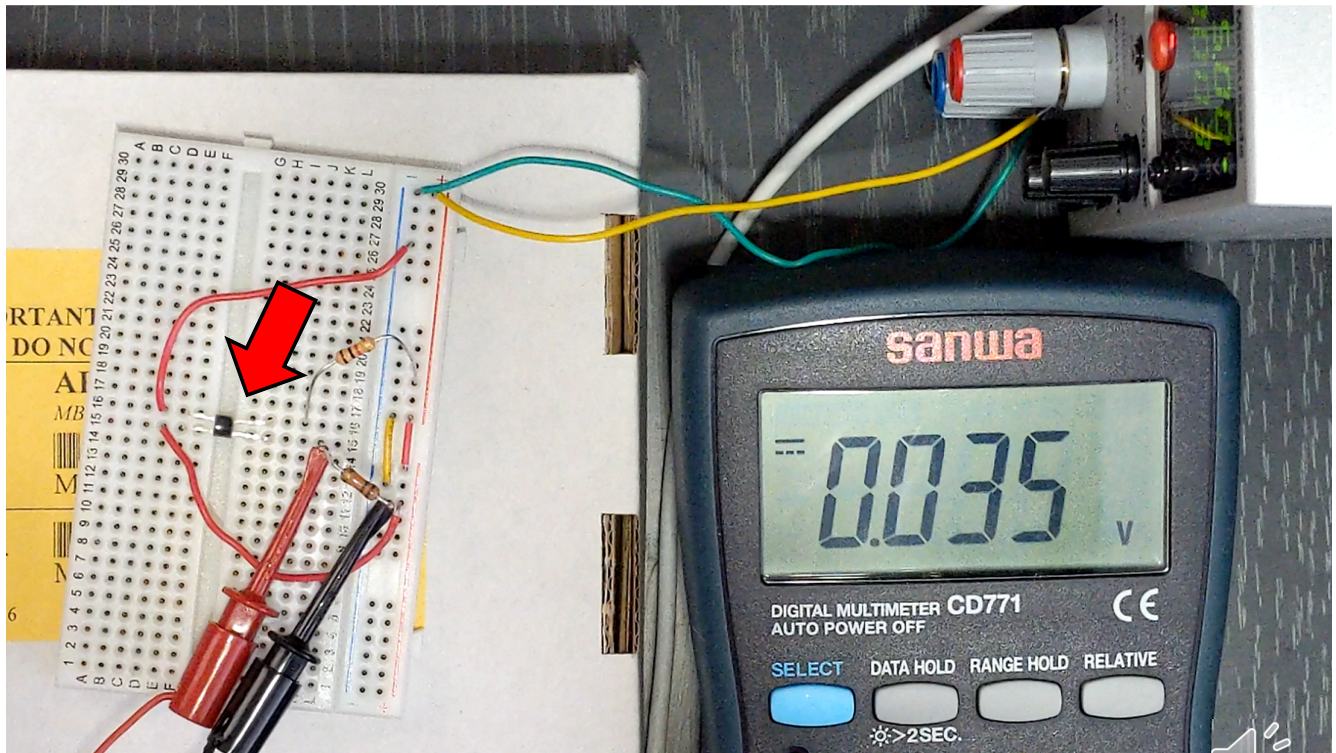
- $\cos(\omega t)$ をかけて積分したものと、
 - $\sin(\omega t)$ をかけて積分したもの
- によって、振幅と位相を求めることができる。

これはこれまでの数式的理解と全く同一。

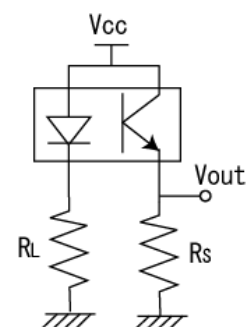
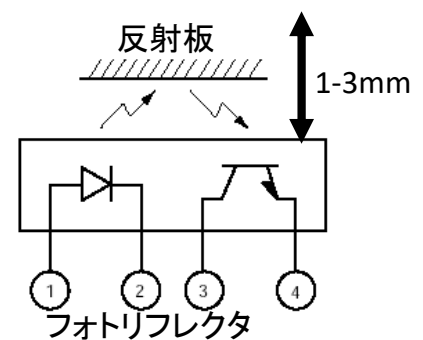
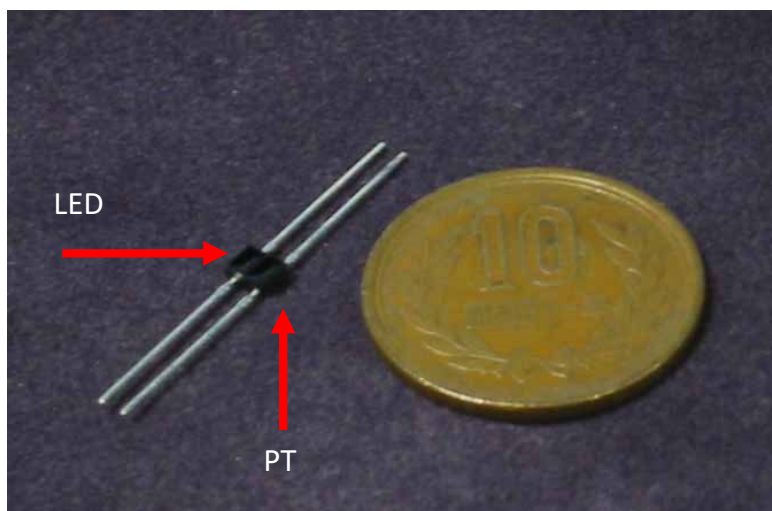


応用事例(3)

フォトリフレクタを用いた近接距離計の校正



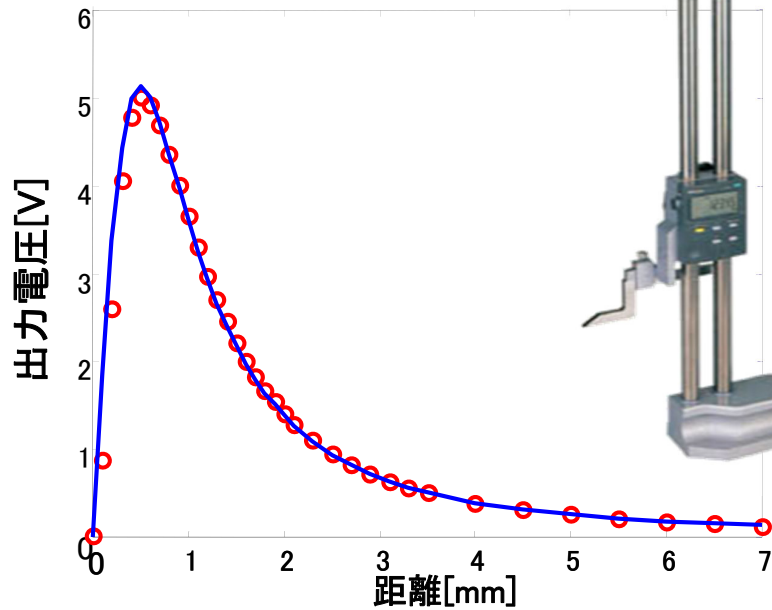
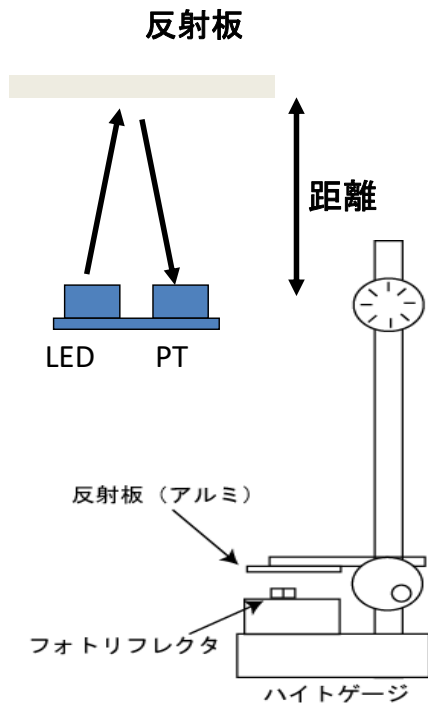
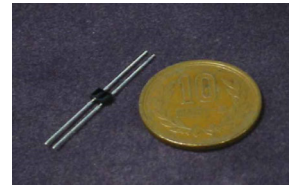
フォトリフレクタを用いた近接距離計の校正



出力電圧は反射光量に比例。
出力電圧から反射板との距離を得たい。



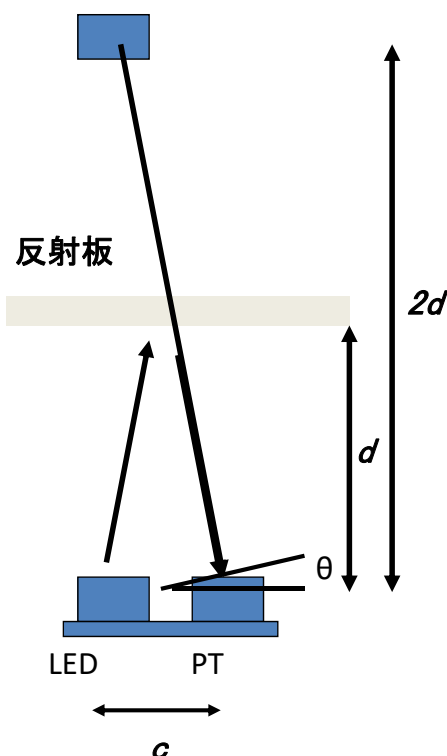
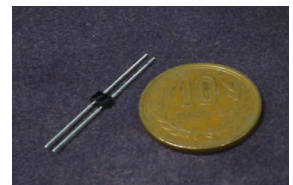
測定



どのように較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか？



モデル化 (1)



反射板を鏡面とみなし、LEDの“像”からPTへの光路を考える。

LEDを点光源とすると、PTの受光量はLED像からみたPTの立体角 Ω に比例。

LED像とPTの距離:

$$l = \sqrt{c^2 + (2d)^2}$$

PTの立体角:

$$\Omega = \frac{\cos \theta}{l^2} \Delta S$$

ΔS : PTの表面積

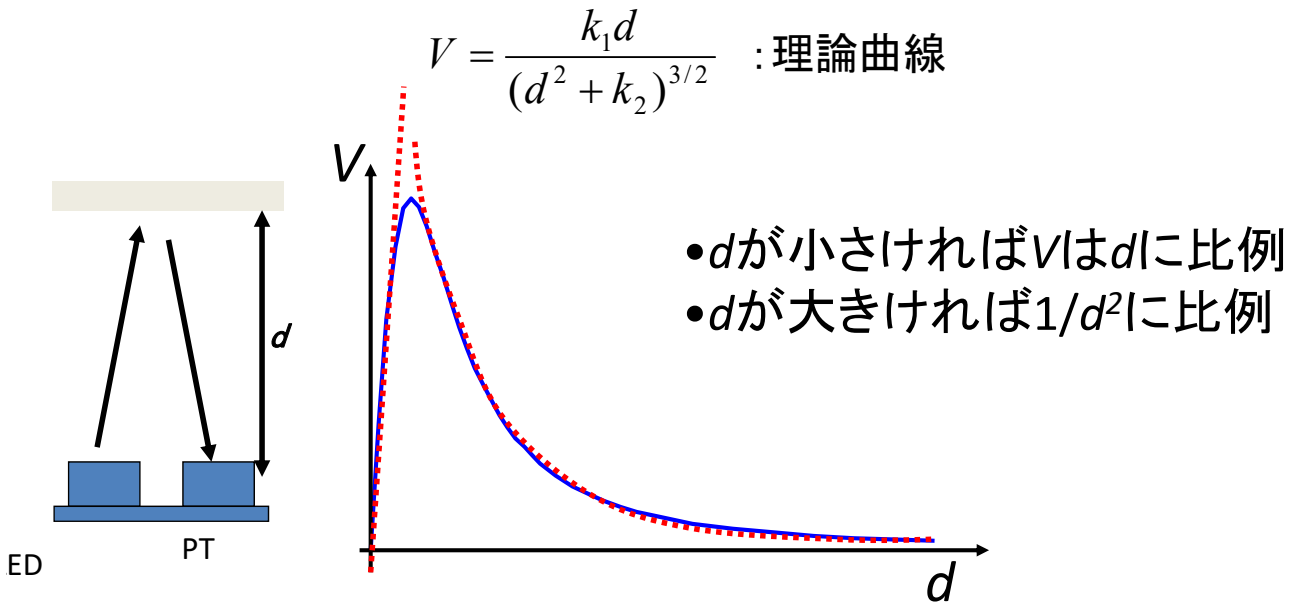
$$\dots = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$

k_1, k_2 : 定数



モデル化 (2)

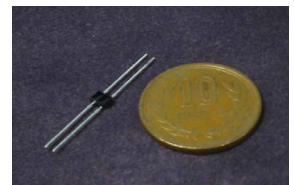
PTの受光量が立体角 Ω に比例するから、出力電圧も同様。



未知パラメータ k_1, k_2 を求めれば
入出力関係が記述できる



フィッティングの準備



$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \begin{cases} d : \text{入力(距離)} \\ V : \text{出力(電圧)} \\ k_1, k_2 : \text{未知パラメータ} \end{cases}$$

変形(線形化)

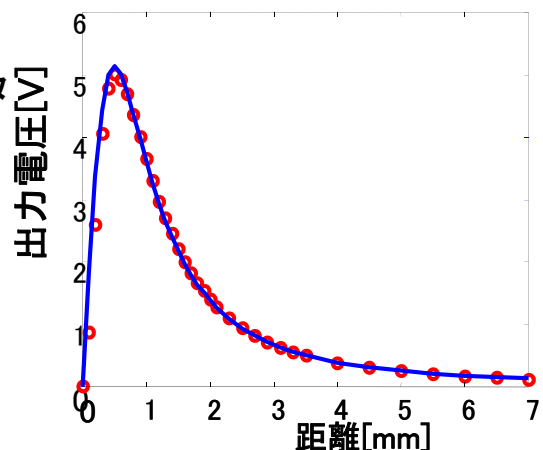
$$V^{2/3}(d^2 + k_2) = k_1^{2/3} d^{2/3}$$

$$V^{2/3} d^2 = k_1^{2/3} d^{2/3} - V^{2/3} k_2$$

$$\left. \begin{aligned} V^{2/3} d^2 &= y \\ k_1^{2/3} &= a_1 \\ d^{2/3} &= x_1 \\ -V^{2/3} &= x_2 \\ k_2 &= a_2 \end{aligned} \right\} \text{と置けば}$$

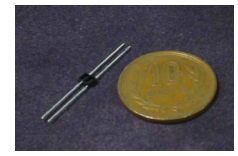
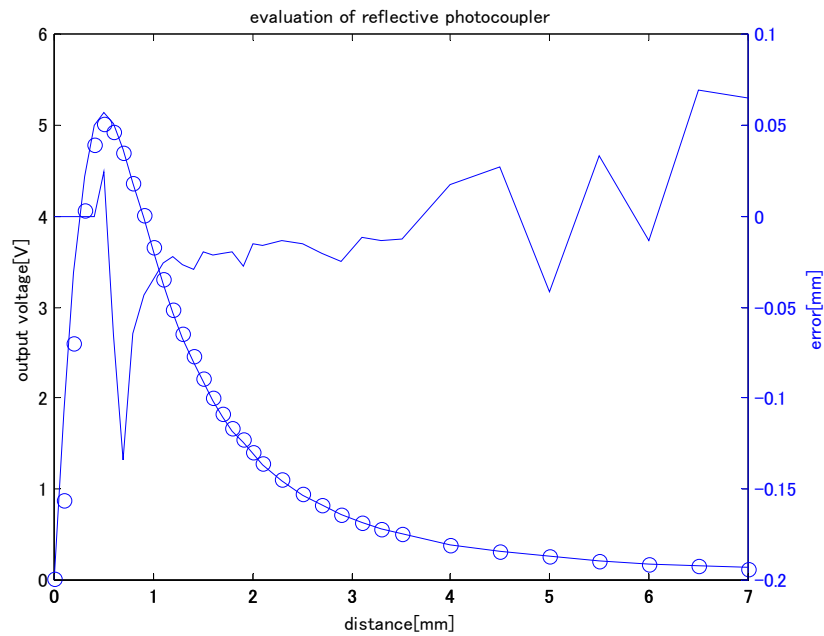
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$\begin{cases} x_1, x_2, y : \text{既知} \\ a_1, a_2 : \text{未知} \end{cases}$$



最小二乗法によって
パラメータを同定できる。





つまりこうした実際問題のフィッティングでは、

- (1) 数式によるモデル化
- (2) 線形の数式に式変形

の手続きをとる。この時最小二乗誤差は多くの場合当初の意味を失う。

(2)を行わず**手続き的に(逐次的に)最小二乗誤差を極小化していく方法**もあり、その方が一般的な問題に適用できる(本講義の範囲外)。

