

インタラクティブシステム論 第7回

梶本裕之

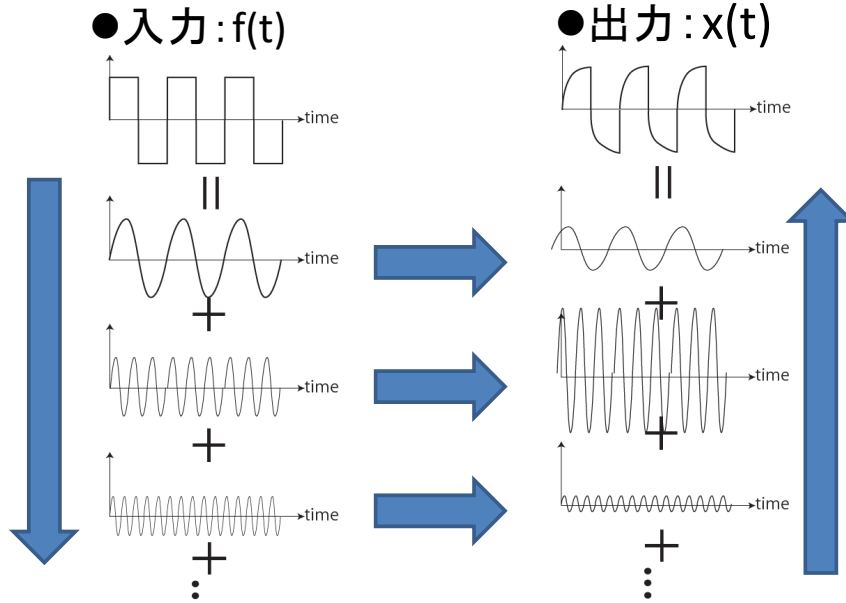
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	4/8	イントロダクション	[pdf] 2021年版	video	4/15
		Scilab課題	[pdf](更新なし)		↑
		上記資料のPython版	[pdf](更新なし)		↑
2	4/15	フーリエ変換	[pdf] 2021年版	video	4/22
3	4/22	フーリエ変換と線形システム	[pdf] 2021年版	video	4/29
-	4/29	昭和の日			
4	5/6	信号処理の基礎	[pdf] 2021年版	video	5/13
5	5/13	信号処理の応用1(相関)	[pdf] 2021年版	video	5/20
6	5/20	信号処理の応用2(画像処理)	[pdf] 2021年版	video	5/27
-	5/27	(出張) 中間確認テスト準備 (自習)			
-	6/3	(出張) 中間確認テスト準備 (自習)			
-	6/10	中間確認テスト			
7	6/17	ラプラス変換	[pdf] 2021年版	video	6/24
8	6/24	古典制御の基礎	[pdf] 2021年版	video	7/1
9	7/1	行列	[pdf] 2021年版	video	7/8
10	7/8	行列と最小二乗法	[pdf] 2021年版	video	7/15
11	7/15	ロボティクス	[pdf] 2021年版	video	7/22
-	7/22	期末テスト準備 (自習)	[pdf]2021年版		
-	7/29	期末確認テスト (現在は大学を予定)			

日程およびテストを大学で行うかについては、随時アナウンスします。Google Classroomでもアナウンスの予定。



(復習：フーリエ級数展開) 歪みを周波数で分解して説明できる

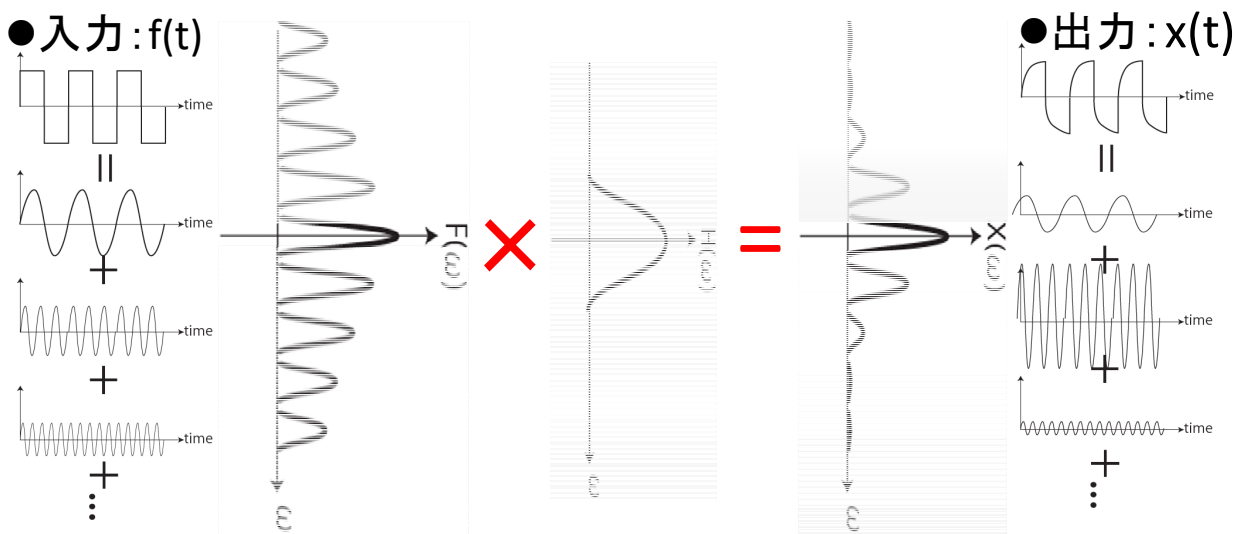


- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解する
- (2) 周波数ごとの出力の振幅と位相を求める.
- (3) 合計すると出力が得られる.

これを連続関数で考えるとどうなるか？



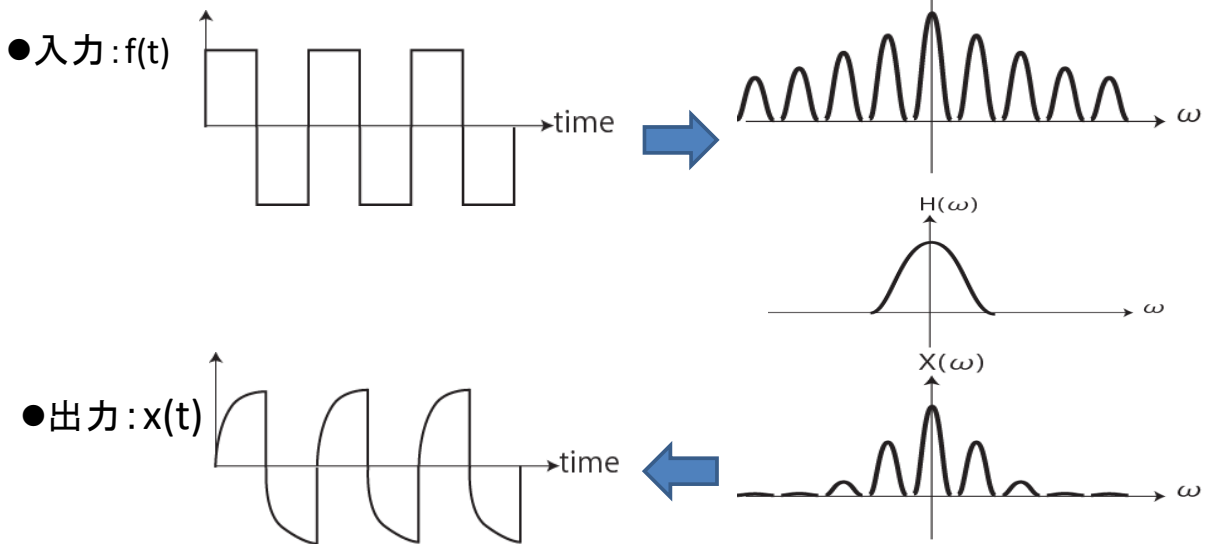
(復習：フーリエ変換) 入出力の関係：関数同士の掛け算



- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解 $\Rightarrow F(\omega)$
- (2) 周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか： $H(\omega)$
- (3) 出力(のフーリエ変換)： $X(\omega) = H(\omega) * F(\omega)$
- (4) 逆フーリエ変換すると出力が得られる： $x(t)$



(復習) 伝達関数



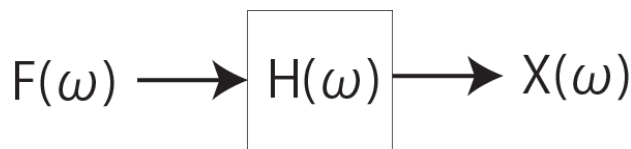
フーリエ空間では、入出力は単なる掛け算で表される。

$$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$$

この入出力関係を定義する**システムの性質** $H(\omega)$ を伝達関数と呼ぶ。

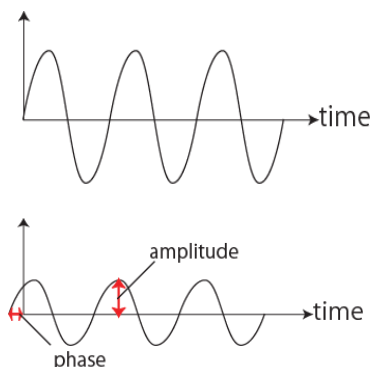


(復習) 伝達関数 $H(\omega)$ を求めるには？



$H(\omega)$ は、周波数 ω の信号を入力したときの出力の振幅と位相を表す。だから...

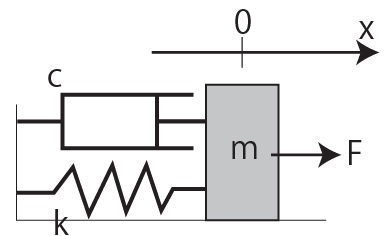
1. ある周波数 ω の正弦波を入力。
2. 出力の振幅と位相を測定。
 - 入出力間の振幅の比率 $\text{amp} = |H(\omega)|$
 - 入出力間の位相差 $\text{phase} = \angle H(\omega)$
3. この周波数での伝達関数は
 - $H(\omega) = \text{amp} \times \exp(j \cdot \text{phase})$.



4. 周波数を変えて測定すれば、 $H(\omega)$ が得られる。



(復習) 式の上で「計測」



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$$f = \exp(j\omega t)$$

●ある周波数 $2\pi f = \omega$ の正弦波を**入力**

$$x(t) = H(\omega) \exp(j\omega t)$$

●同じ周波数で振幅と位相の異なる**出力**が得られる

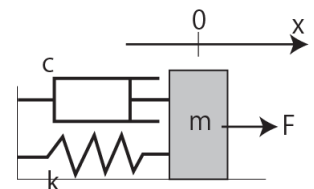
<p>この$x(t)$の微分は？</p> $\dot{x}(t) = j\omega H(\omega) \exp(j\omega t)$ $= j\omega x(t) = s x(t)$	<p>同様に2階微分は</p> $\ddot{x}(t) = (j\omega)^2 H(\omega) \exp(j\omega t)$ $= s^2 x(t)$
<p>$j\omega$と書くのがわずらわしいのでsと書く (本当はもっと意味があるが、とりあえず)</p>	

元の式に代入 $(ms^2 + cs + k)H(\omega) \exp(j\omega t) = \exp(j\omega t)$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$s=j\omega$ を代入すれば、
システムの伝達関数に他ならない

しかし実際は. . .



- 時刻 $t \geq 0$ だけ考えればよい場合がほとんど ($t=0$ が「初期状態」)
- 入力 $f(t)$ がフーリエ変換出来ない状況が**普通**に存在する

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} 1 \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1 - \exp(-j\omega \infty)}{j\omega} \quad ? ?$$

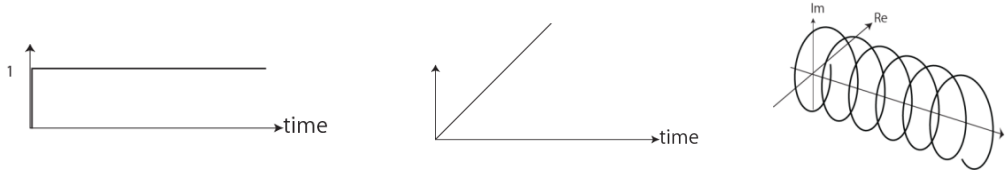
$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} t \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \dots$$

収束しない関数は積分をうまく処理できない(上記の例に関しては δ 関数の導入で扱える)
要は、**正弦波の重ね合わせで表現できない。**

拡張しよう

課題: 正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい.

その関数は,

- ✓ $\exp(-j\omega t)$ の自然な拡張でありたい
- ✓ 微積分に対する不変性は保ちたい



新たな基底関数として, $\exp(-st)$ を考える.
ただし s はもはや虚数 $j\omega$ ではなく, 複素数.



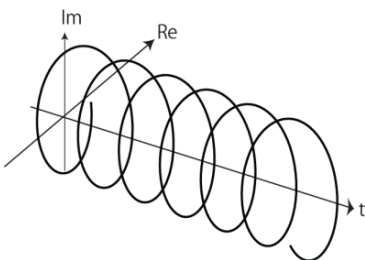
$\exp(-st)$

実質的には2変数の関数

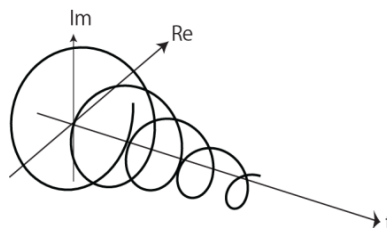
$$\begin{aligned}\exp(-st) &= \exp(-(c+j\omega)t) \\ &= \underline{\exp(-ct)} \times \underline{\exp(-j\omega t)}\end{aligned}$$

増大or減衰成分 回転成分

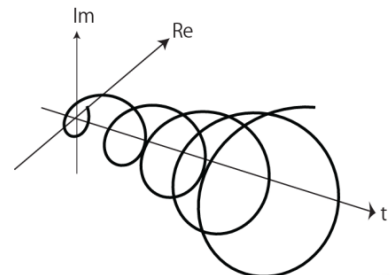
● $c=0$



● $c>0$



● $c<0$



微積分に対する $\exp(st)$ の不変性

$\exp(j\omega t)$ の場合と同様, $\exp(st)$ も微分, 積分しても関数の形は不変.

$$\frac{d}{dt} \exp(st) = s \exp(st) \qquad \int \exp(st) dt = \frac{1}{s} \exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \exp(st) = s^n \exp(st) \qquad \int \int \int_n \exp(st) dt = \frac{1}{s^n} \exp(st)$$

微分 \Rightarrow s をかける操作

積分 \Rightarrow s で割る操作



ラプラス(Laplace)変換：フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

ラプラス変換

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

<ラプラス変換のフーリエ変換による解釈>

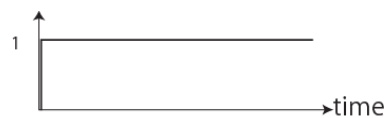
- 純虚数 $j\omega \Rightarrow$ 複素数 $s=c+j\omega$ に拡張
- 元の関数 $f(t)$ に $\exp(-ct)$ をかけることで発散を抑えた関数をフーリエ変換している、と解釈できる
- 逆に $\exp(-ct)$ によって $t<0$ の領域で発散してしまうので、そこは $f(t)=0$ とする。無限の過去を扱う必要はないため問題なし



ラプラス変換の例：ステップ関数

ステップ関数
(階段関数)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

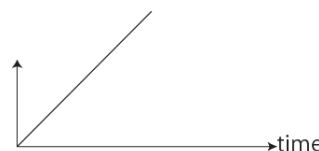
ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：ランプ関数

ランプ関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：sin, cos

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \sin(\omega t)e^{-st} dt$$

=

=

=

=

=

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-st} dt$$

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲内(Re(s)>0)



ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t) = \exp(at)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は, Re(s-a)>0



ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く



ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^t f(\tau) d\tau\right) = \int_0^{\infty} \left(\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau\right) \exp(-st) dt$$

=

=

=

(ルール)ラプラス変換では、積分は1/sをかけることに相当



sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$$

ルールより、 $\cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めるには、 $\sin(\omega t)$ のラプラス変換にsをかけ、 ω で割ればよい($\sin(0)=0$ より)

... 確かにそうになっている



sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$$

ルールより、 $\sin(\omega t)$ のラプラス変換を求めるには、 $\cos(\omega t)$ のラプラス変換にsをかけ、f(0)を引き、 $-\omega$ で割れば良い

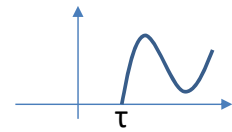
... 確かにそうになっている



ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $f(t - \tau)$ のラプラス変換は？

ただし $\tau \geq 0$ (時間遅れ) とし、 $t < \tau$ の範囲では $f(t) = 0$ とする。



$$L(f(t - \tau)) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) \exp(-st) dt$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$t' = t - \tau$

$t < \tau$ の範囲で $f(t) = 0$ より
 $t' = t - \tau < 0$ の範囲で $f(t') = 0$

教科書によっては $u(t - \tau)f(t - \tau)$ (u はステップ関数)
 (ルール)

ラプラス変換では、 τ の時間遅れは $\exp(-s\tau)$ をかけることに相当
 ただし $t < \tau$ の範囲で $f(t) = 0$ という前提。



ラプラス変換表

$$1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s - a}$$

$$t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{s - a} \right)^2$$

$$t^n \quad \rightarrow \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\dot{f}(t) \quad \rightarrow \quad sF(s) - f(0)$$

$$\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t - \tau) \quad \rightarrow \quad \exp(-s\tau) F(s)$$

通常ラプラス逆変換は、表を見て行う



ラプラス変換の応用：微分方程式

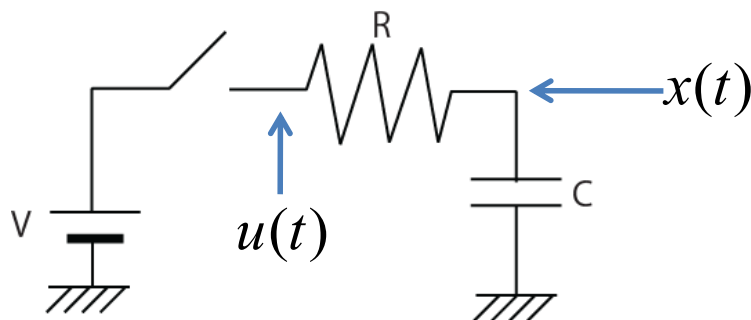
$$\dot{f}(t) \quad \longrightarrow \quad sF(s) - f(0)$$

$$\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s}F(s)$$

- 微積分はラプラス変換によってsに関する多項式に変換される。
- このため、微分方程式はラプラス変換によって多項式の解を求める問題に変換できる。



ラプラス変換を使ってみる：ローパス(1)

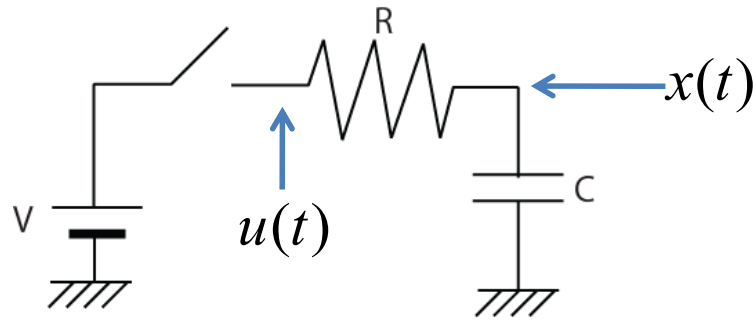


- 入力：抵抗Rの左側の電圧 $u(t)$.
- 出力：コンデンサの電圧 $x(t)$.

(問題) スイッチを入れた後の $x(t)$ の変化を調べよ



ラプラス変換を使ってみる：ローパス(2)



●電流*I*を考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = \frac{1}{C} \int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●*x*のラプラス変換を*X*,

●*u*のラプラス変換を*U*とすると,

$$U =$$

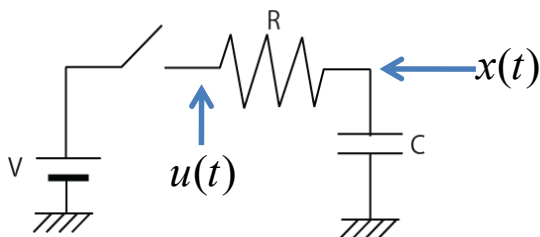
(∴(ルール)微分⇒*s*をかける)

$$=$$

$$X =$$



ラプラス変換を使ってみる：ローパス(3)



$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

$$U(s) =$$

$$X =$$

$$=$$

$$=$$

部分分数展開

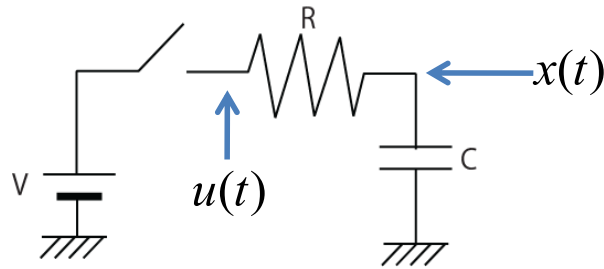
$$a = RC$$

$$b = -RC$$

$$X =$$



ラプラス変換を使ってみる：ローパス(4)



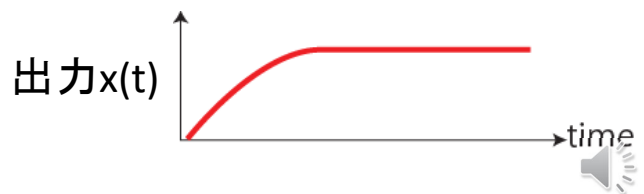
$$X = V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$



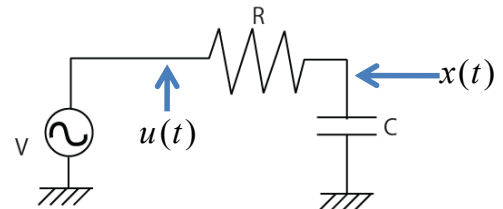
ラプラス変換表を見て逆変換する

$x(t) =$

定常成分 過渡成分



伝達関数



フーリエ変換の時と同様に、
入出力関係を決める「システムの特性」を知りたい

- 先程の例では
xのラプラス変換をX, uのラプラス変換をUとしたとき,

$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

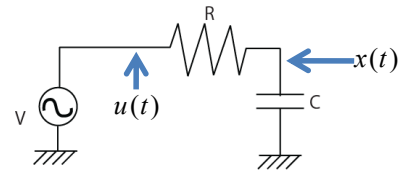
U → G → X

この部分が入出力関係を決めている。 **伝達関数G**.
s=jωを代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ.

$$F(\omega) \longrightarrow \text{H}(\omega) \longrightarrow X(\omega)$$

伝達関数

$$H(\omega) = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



s=jωを代入して、周波数応答をしてみる

Scilabソース

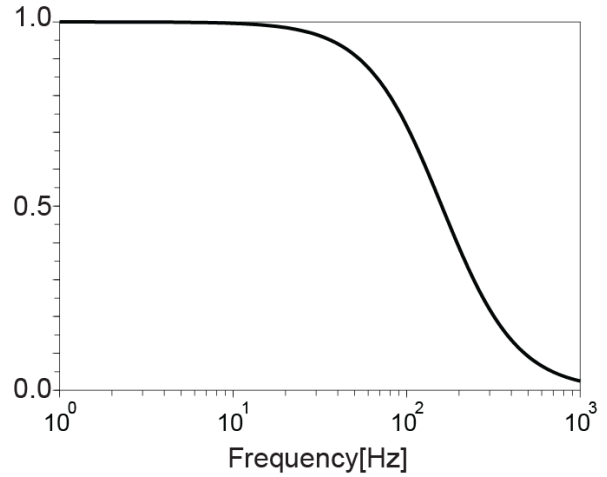
```
R=1000; //抵抗 1kΩ
C=10^(-6); //コンデンサ1μF
f=[1:1000]; //周波数
w=2 * %pi * f; //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d(f,power_spec,logscale="ln");
```

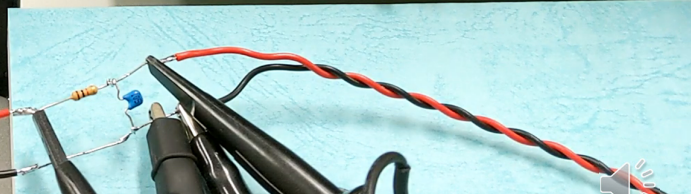
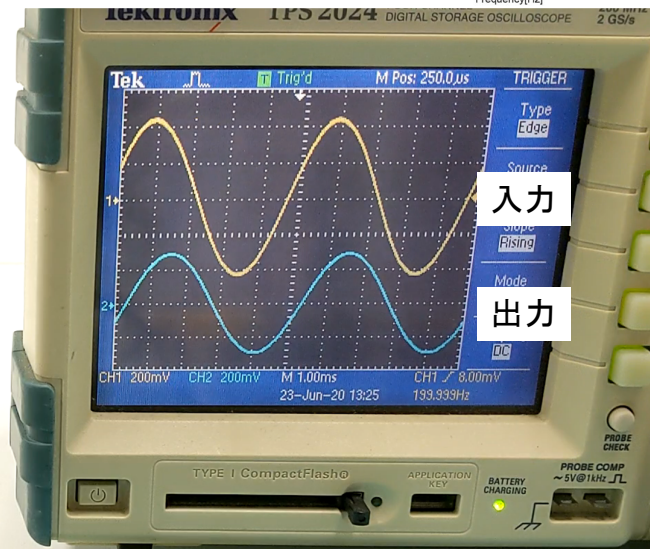
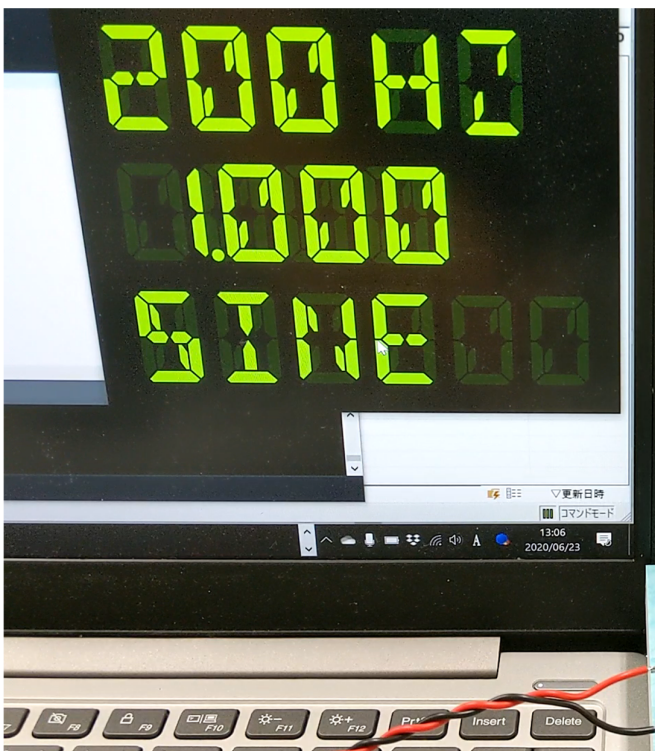
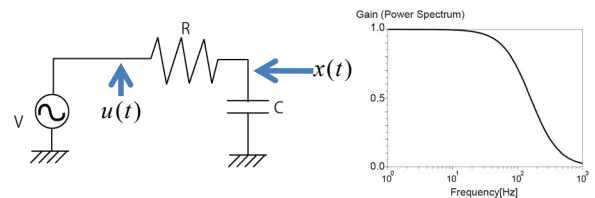
Gain (Power Spectrum)



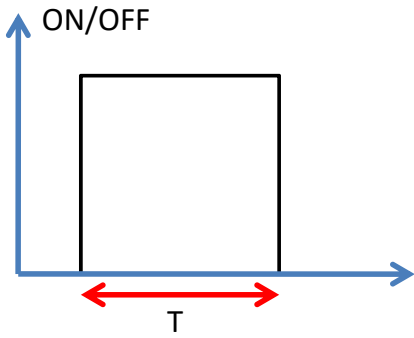
1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで、
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出来た。



ローパスフィルタ実験



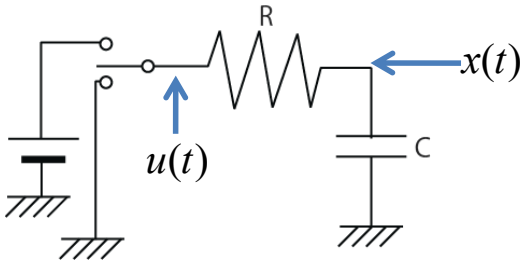
時間幅Tのパルスを与えるとき？



$$u(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

この入力のラプラス変換は、

$$U(s) =$$



出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて

$$X =$$



時間幅Tのパルスを与えるとき？

$$X = \frac{1}{sRC+1} \frac{1-e^{-sT}}{s} V$$

$$=$$
$$=$$

これは、

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \right) V \quad \text{と、} \quad \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \right) e^{-sT} V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように

$$=$$

後者の逆ラプラス変換は、
 $\exp(-sT)$ が掛かっている。これはラプラス変換表により、
Tの時間遅れを意味するので、

$$=$$

ただしこれは $t \geq T$ でのみ適用される ($t < T$ では0。時間遅れのラプラス変換の解説参照)



時間幅Tのパルスを与えるとき？

結局、応答は、 $t < T$ では、

$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$



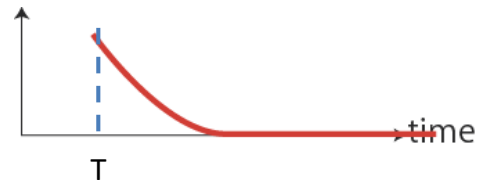
これは最初に求めたステップ応答。

$t \geq T$ では、

$$= \text{[Blank Box]}$$

$$= \text{[Blank Box]}$$

$$= \text{[Blank Box]}$$

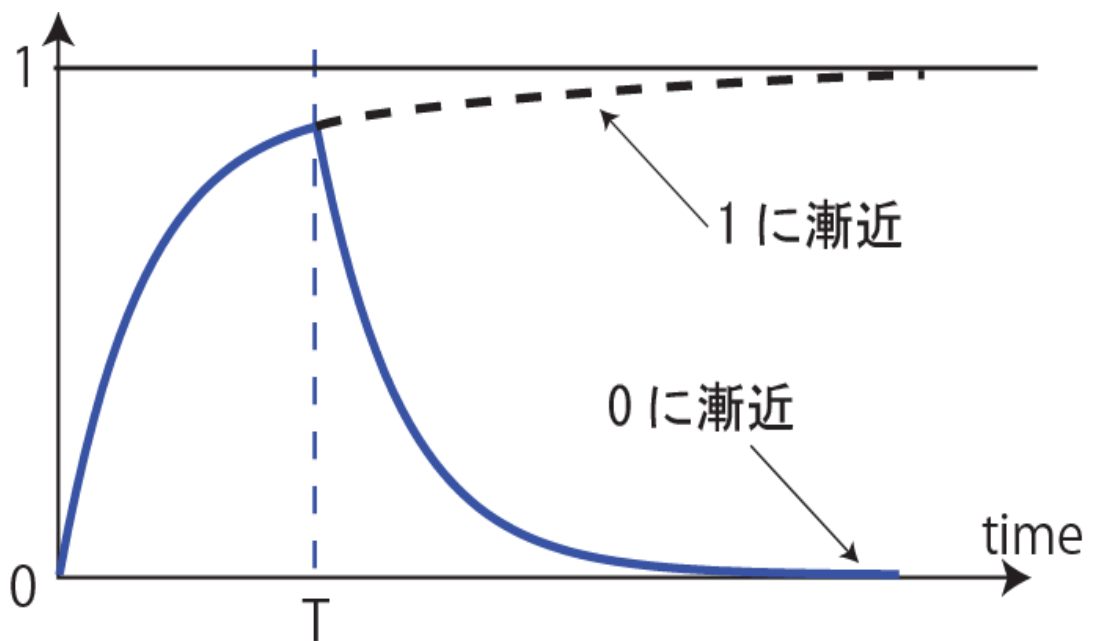


定数 減衰項

これは放電による減衰を意味する
 $t = T$ では2式は一致する



時間幅Tのパルスを与えるとき？まとめ

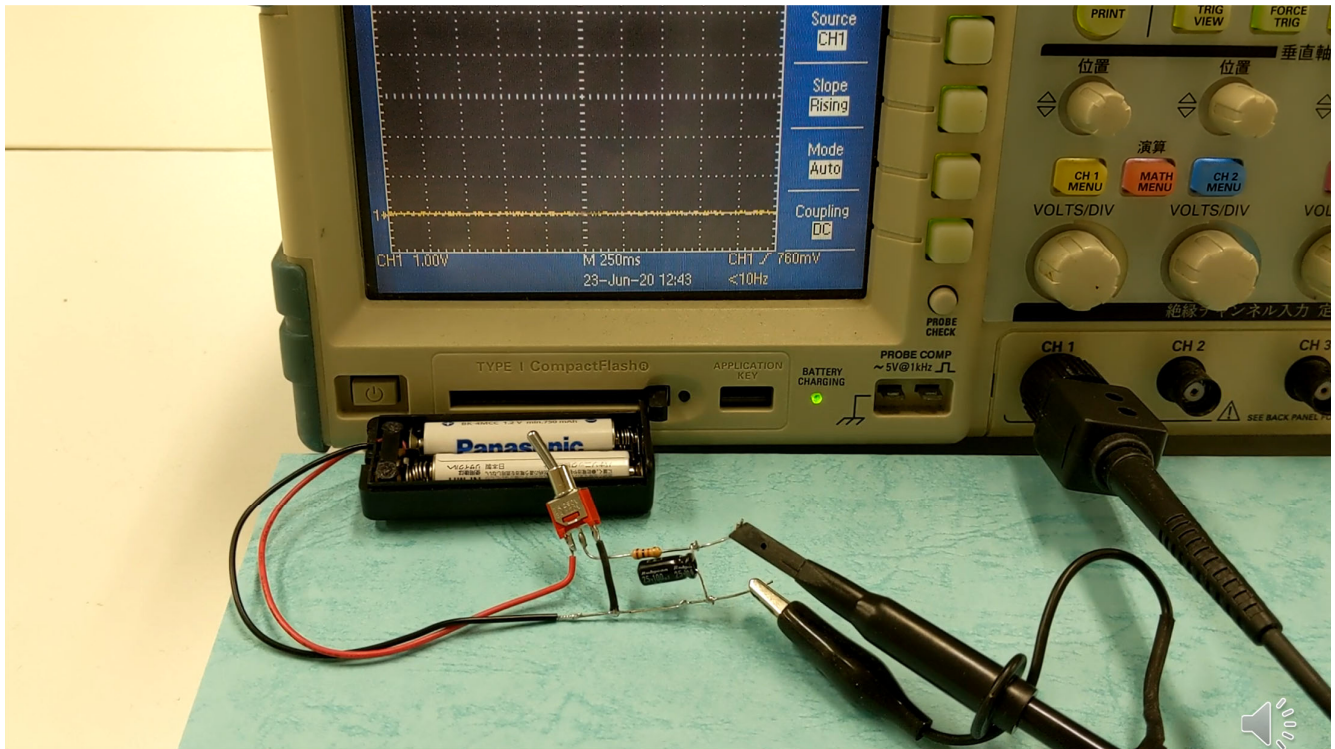
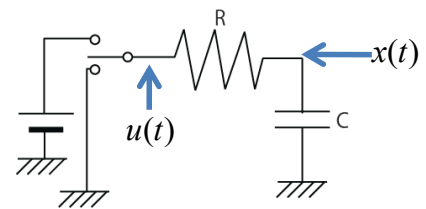


$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

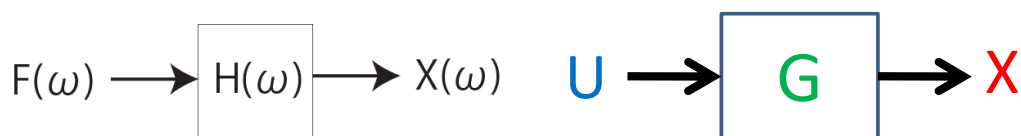
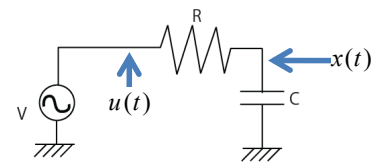
$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}T})e^{-\frac{1}{RC}(t-T)}$$



ローパスフィルタへの パルス入力



伝達関数まとめ



(1) システムの入出力関係を決める**伝達関数G**をもとめる

●先程の例では、 x のラプラス変換を X , u のラプラス変換を U としたとき、

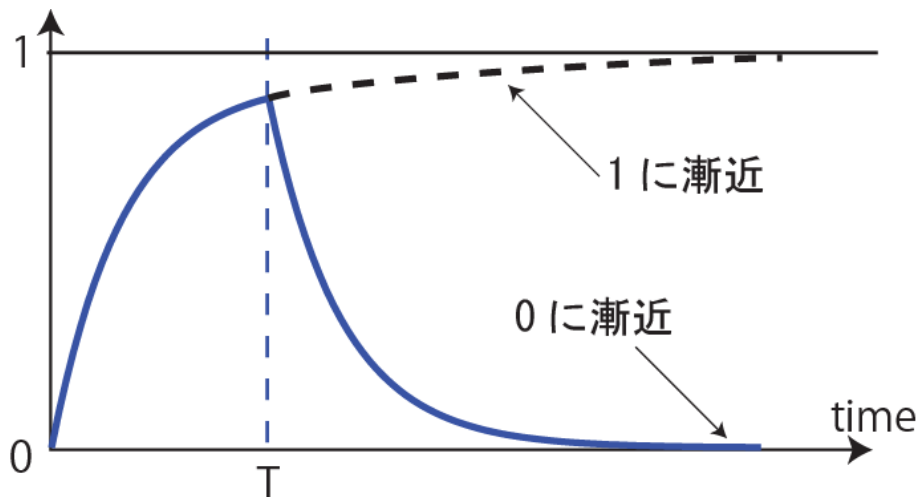
$$X = \boxed{\frac{1}{sRC + 1}} U \quad \text{この部分}$$

(2) **入力**のラプラス変換**U**を求める

(3) $X = GU$ によって**出力**のラプラス変換**X**が得られる。

(4) 逆ラプラス変換によって**出力波形**が得られる。

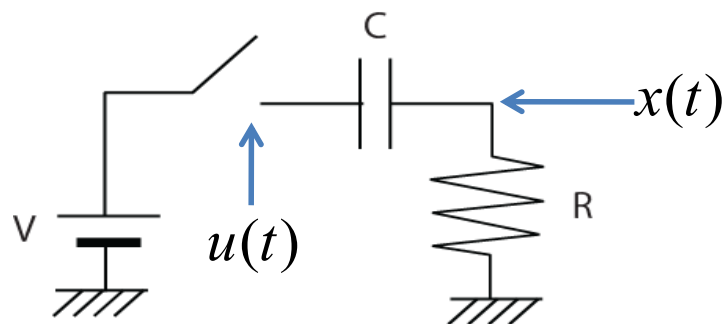
レポート課題(1)



$R=1\text{k}\Omega$ 、 $C=1\mu\text{F}$ 、 $T=1\text{ms}$ 、 $V=1$ として、時刻 $0\sim 10\text{ms}$ の間の電圧の変化をプロット、観察せよ。



ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(1)

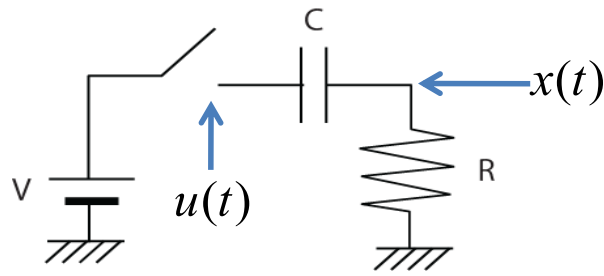


- 入力: コンデンサの左側の電圧 $u(t)$.
- 出力: 抵抗の電圧 $x(t)$.

(問題) スイッチを入れた後の $x(t)$ の変化を調べよ



ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(2)



●電流*I*を考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C} \int \frac{x}{R} dt$$

●*x*のラプラス変換を*X*,

●*u*のラプラス変換を*U*とすると,

$$U =$$

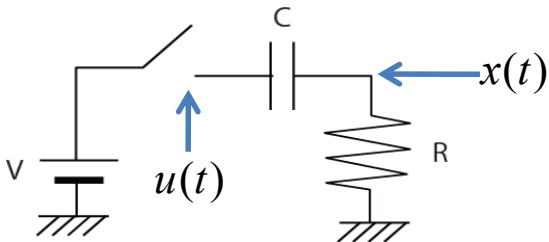
(∴(ルール)積分⇒*s*で割る)

$$=$$

$$X =$$



ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(3)



$$X = \frac{sCR}{sCR + 1} U$$

これで**伝達関数**がもともった
*t=0*でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

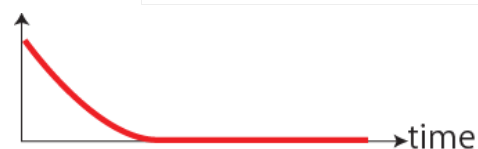
$$U(s) =$$

$$X =$$

$$=$$

ラプラス変換の表を使って逆変換する

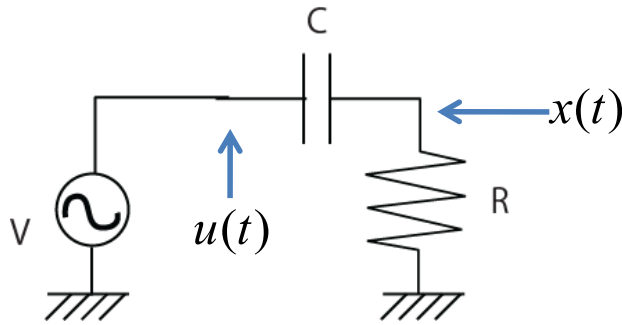
$$x(t) =$$



一瞬だけ電流が流れることがわかる



レポート課題 (2) : ハイパスフィルタの伝達関数

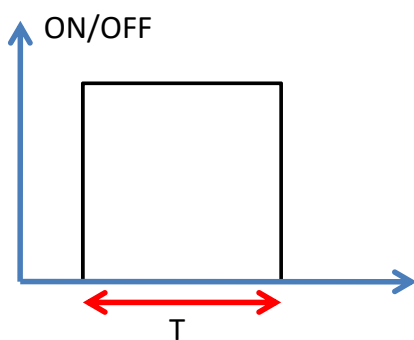


ローパスの場合を参考に、上記回路の伝達関数を求め、
 $R=32\Omega$, $C=100\mu\text{F}$ の場合の周波数応答を表示するコードを書け。

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか、
 観察の結果をコード中にコメントすること。



時間幅Tのパルスを与えると？

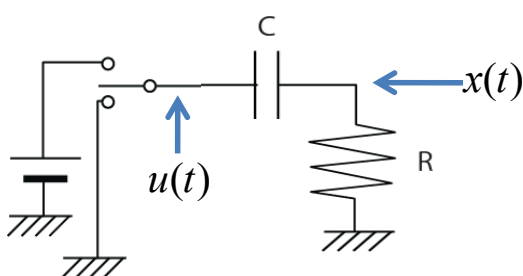


$$u(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

この入力のラプラス変換は、

$$U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} V$$

出力のラプラス変換は、
 システムの伝達関数をかけて



$X =$



時間幅Tのパルスを与えるとき？

$$X = \frac{sCR}{sCR + 1} \frac{1 - e^{-sT}}{s} V$$

=

これは、

$$\left(\frac{1}{s + \frac{1}{CR}}\right)V \quad \text{と、} \quad \left(\frac{1}{s + \frac{1}{CR}}\right)e^{-sT}V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように

$$x(t) =$$

後者の逆ラプラス変換は、**exp(-sT)**が掛かっている。これはラプラス変換表により、**Tの時間遅れ**を意味するので、

$$x(t) =$$

ただしこれは $t \geq T$ でのみ適用される ($t < T$ では0。時間遅れのラプラス変換の解説参照)

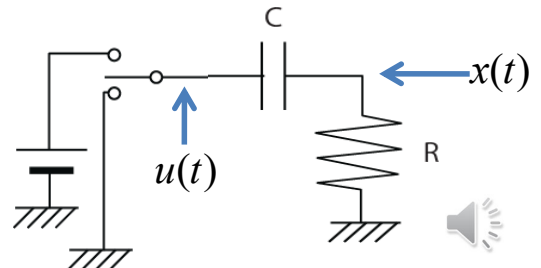
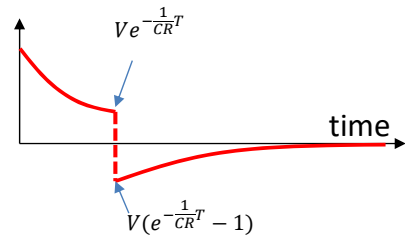
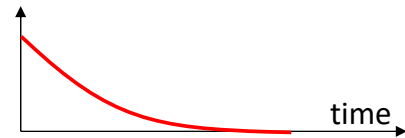
時間幅Tのパルスを与えるとき？

結局、応答は、 $t < T$ では、

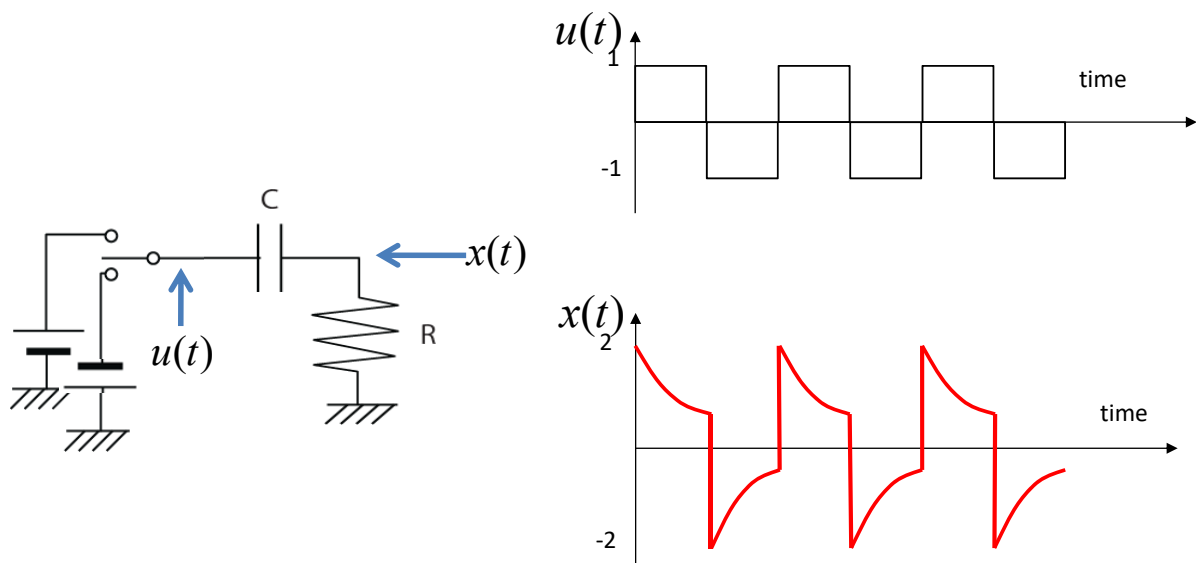
これは最初に求めたステップ応答。
 $t \geq T$ では、

=

スイッチを切り替えた瞬間に極性が反転し、コンデンサに充電された電圧が現れる。その後自由放電。

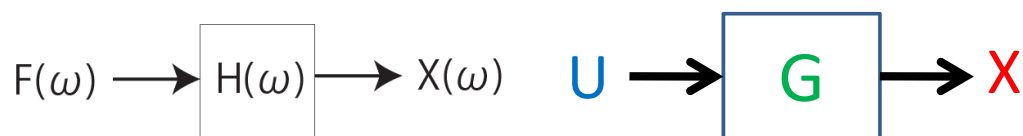
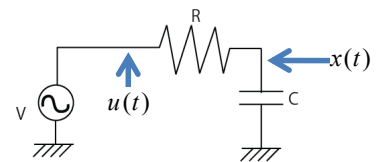


(参考) CRハイパスフィルタへの正負矩形波入力



Peak to peak 電圧は約2倍になるので、電圧を上げるための回路等に使われる。🔊

今日の話まとめ



フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う
システムの応答は次のようなステップで求めることができる

- (1) システムの入出力関係を決める **伝達関数 G** をもとめる
- (2) **入力のラプラス変換 U** を求める
- (3) $X = GU$ によって **出力のラプラス変換 X** が得られる。
- (4) 逆ラプラス変換によって **出力波形** が得られる。

