インタラクティブシステム論
第5回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

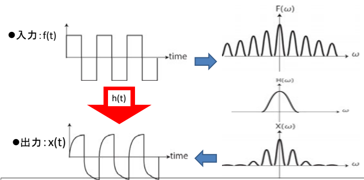
10/4 イントロダクション
10/11 フーリエ変換
10/18 フーリエ変換と線形システム
10/25 信号処理の基礎
11/1 信号処理応用１（相関）
11/8 （休講）~~信号処理応用２（画像処理）~~
11/15 インタラクティブシステムの実際（小泉先生）
11/22 （調布祭準備日）
11/29 中間確認テスト
12/6 ラプラス変換
12/13 （出張予定）
12/20 古典制御の基礎
1/10 行列
1/17 行列と最小二乗法
1/24 ロボティクス
1/31 期末確認テスト

中間確認テスト

中間テスト用の問題集を配布します。

一度式の導出を覚えることを意図しています。

(復習）周波数領域ではなく，時間領域のまま議論できないか？



X(ω)＝H(ω)×F(ω)：周波数領域で美しいのは分った．
時間的な現象として何が起きているのか分からない．

(復習）式で考えよう

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$
逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

X(ω)＝H(ω)×F(ω)

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る．

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega\\&=\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\right)\exp(j\omega t)d\omega\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\omega(t-\tau))d\omega\right)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

逆順の計算もしておく（ふつうはこちら）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$
逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

両辺をフーリエ変換．

$$\begin{aligned}X(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega t)dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega(\tau+(t-\tau))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega\tau)\cdot\exp(-j\omega(t-\tau))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega(t-\tau))dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} h(t')\exp(-j\omega t')dt'\\&=F(\omega)H(\omega)\end{aligned}$$

(復習）コンボリューション定理

$$X(\omega)=F(\omega)H(\omega)=H(\omega)F(\omega)$$

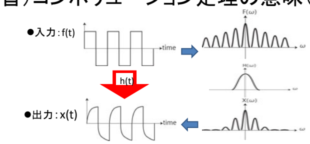
フーリエ逆変換　フーリエ変換

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

簡略化のため次のようにも表記される

$$x(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$$

(復習）コンボリューション定理の意味（１）

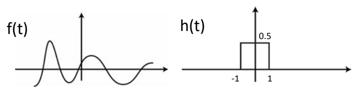


$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad X(\omega)=F(\omega)H(\omega)$$

•h(t)のフーリエ変換がH(ω)であるとする．
•周波数領域でフィルタH（ω）をかけることは，
時間領域では，入力信号x(t)に対する関数h(t)の畳み込み積分（コンボリューション）として表現される．

(復習）コンボリューション定理の意味（２）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$



例えば，h(t)=0.5　(-1<t<1)なら，

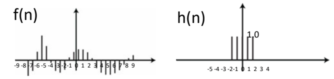
$$x(t)=\int_{-1}^{1} 0.5f(t-\tau)d\tau$$

これは，f(t)を平均化していくフィルタ

(復習）離散化による理解

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

x(n)=…+ h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) +…+ h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4)+…



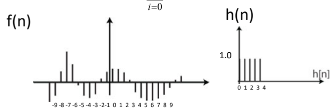
h(n)が，n=-2～2の間だけ1の場合，

x(n)=f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)

●この場合，出力xは，入力fの「平均化」になっている．
●つまりこの場合，hは平滑化フィルタである．

(復習）FIRフィルタ

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

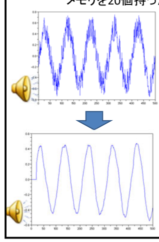


i=0から始める：未来のデータ が使えないことを意味する．
この例は，元データf(n)を，４個平均して出力する．

•未来のデータが使えない例：リアルタイム制御
•先のデータが使える例：画像処理

(復習）平滑化フィルタの実例

メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化

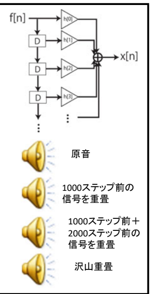


Scilabコード例

```
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
  for i=0:19,
    out(n)=out(n)+wave(n-i)/20;
  end
end

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

(復習) エコー

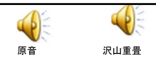
エコー＝時間遅れ信号の重畳.
これはFIRフィルタで実装できる.

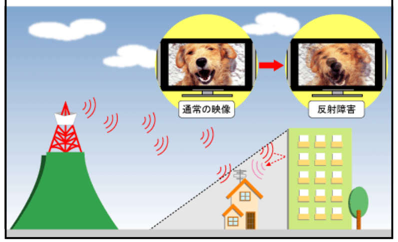


Scilabコード例

```
wave = loadwave('aiueo.wav');

out=zeros(wave);

//エコー（1000ステップ前の信号を重畳）
for n=1000:length(wave),
   out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end

playsnd(out,11000);        //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
```

エコーは害





ゴースト現象

相互相関関数
自己相関関数

エコーキャンセル (テレビだとゴーストリダクション)

FIRフィルタによってエコーの影響を低減することができる.

考え方:

(1) エコー成分のモデルを推定

out(n)=wave(n)+0.5*wave(n-100);

「100ステップ前の信号が0.5のゲインで重畳されている!」

(2) そのモデルに基づき, エコー成分と逆のゲインをかける

out(n)-0.5*out(n-100)

=wave(n)+0.5*wave(n-100)-0.5*(wave(n-100)+0.5*wave(n-200))

=wave(n)+0.25*wave(n-200)

⇒エコーが半分に低減！

(3) 当然もっと工夫すれば. . . (もっとメモリがあれば)

out(n)-0.5*out(n-100)- 0.25*out(n-200)

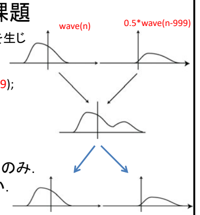
=...=wave(n)+0.125*wave(n-300)

⇒無限にメモリがあれば完璧に消せる.

エコーキャンセルの課題

エコー成分が, どれだけ時間遅れを生じてやってくるかのモデルを推定

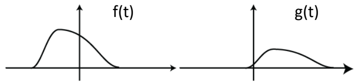
out(n)=wave(n)+0.5*wave(n-999);



＜問題＞
観測できるのは,
エコーの「結果」としてのout(n)のみ.
元の信号はわかっていない.

この信号からどのように,
モデルを推定するのか？

より簡単な問題から考えよう



二つの信号が,
- ●時間的にどれだけずれているのか
- ●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか

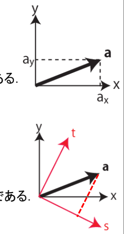
を測定したい.

(復習)ベクトル空間と内積

ベクトル **a**=[a_x, a_y] のx成分は？. . . . . a_x

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である.

a•**x** = [a_x, a_y]•[1,0] = a_x



回転した座標軸, s, tを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y] の, s 成分は？

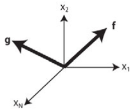
これはベクトル**a**とベクトル **s**=[s_x, s_y]との内積である.

a•**s** = [a_x, a_y]• [s_x, s_y]

内積は, あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

(復習)N次元空間では

N次元空間で, 二つのベクトル
f=[f_1, f_2, ... ,f_N], g=[g_1, g_2, ... ,g_N] を考える.



内積 **f**•**g**は, ベクトルfの, g軸成分(または逆)を表す.

$$= [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N]\bullet[g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]$$

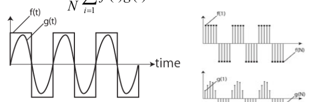
$$= \sum_{i=1}^{N} f_i g_i$$

(復習)波形fに波形gはどれだけ含まれるか

波形f中の, 波形gの成分

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt \qquad \text{(連続関数)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i) \qquad \text{(離散化して考えた場合)}$$



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

相互相関

＜問題＞
二つの信号が,
- ●時間的にどれだけずれているのか
- ●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか

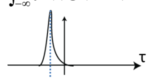
を測定したい.

内積を思い出せば,
次の手順で測定すればよいことがわかる
- ●g(t)をτだけずらしてみる ⇒
- ●f(t)との内積を取ってみる ⇒
- ●τを変化させていく.

相互相関

$R_{fg}(\tau)$: 二つの関数f(t), g(t)の, 相互相関関数

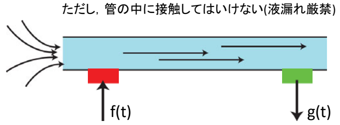
$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$



$R_{fg}(\tau)$が最大の値をとるτ ＝ 元の関数f(t)とg(t)のズレ
(ただし直流成分を取り除いた後)

相互相関の応用:速度計測

管内の流速を正確に測定したい
ただし，管の中に接触してはいけない(液漏れ厳禁)

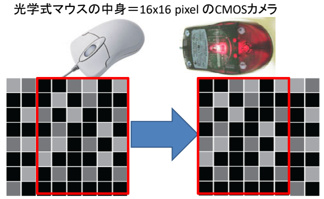


上流に熱源を置き，f(t)でランダムに変動させる.
下流で温度を測定する. g(t)

f(t)とg(t)の相互相関関数が最大となる時間差τが，
水流によって熱が移動するのに要する時間である.

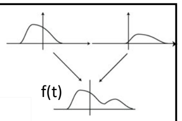
相互相関の応用:速度計測

光学式マウスの中身＝16x16 pixel のCMOSカメラ



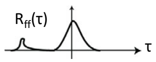
二つの画像(＝2次元関数)同士の相互相関を取ることで
移動量を計測する. 自動車の速度計測等にも利用.

自己相関



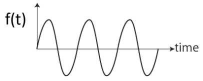
二つの関数f(t)，g(t)の代わりに，
ひとつの関数f(t)の相関を取る.

$R_{ff}(\tau) =$

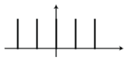


自己相関関数は，
「どれだけずれたら自分自身に近い形になるか」
を表す.
すなわち，エコーを発見していることに他ならない.

周期関数の自己相関

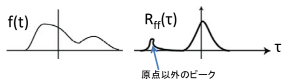


$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$



周期関数の自己相関関数は沢山のピークが出る

自己相関まとめ



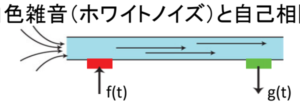
$R_{ff}(\tau)$: 自分自身をτずらしたら，自分自身にどれだけ似ているか

●当然，τ＝0で最大値を取る.

●τ≠0で大きな値をとった場合，
その信号にはτの時間遅れ(エコー)成分が含まれている.

●信号に潜む周期性を発見することもできる

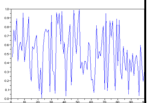
白色雑音(ホワイトノイズ)と自己相関



元の信号f(t)に「周期性」があったら，f(t)とg(t)の相互相関は
沢山の「ニセのピーク」が出てしまう.

元の入力f(t)はなるべく「でたらめ」であることが望ましい⇒白色雑音

＜白色雑音の定義＞
1. あらゆる周波数成分が均等に含まれる.
2. 自己相関関数がτ=0以外では全て0
(＝エコー成分，周期性を全く持たない)



自己相関とパワースペクトル

自己相関関数をフーリエ変換してみる。

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$=$

$=$

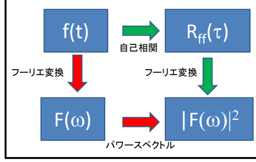
$=$

自己相関とパワースペクトル

$=$

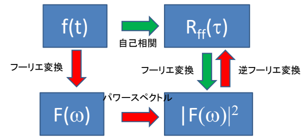
$=$

$= \|F(\omega)\|^2$



ウイナー・ヒンチンの定理

自己相関とパワースペクトル



自己相関は
フーリエ変換⇒パワースペクトル⇒逆フーリエ変換
によって間接的に計算できる

●自己相関を直接計算した時の計算量:O(n^4)
●フーリエ変換(FFT)を使った時の計算量:O(nlog(n))
この方が計算が早いため多用される。

レポート課題1:自己相関

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする. (前回のレポート)

(2)その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出).

(3) ウイナー･ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

(2)(3)のScilabソースファイルおよび結果のグラフ画像の添付. waveファイルは添付不要。(2)(3)の処理にかかった時間についてコメント

レポート課題:ヒント

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする. (前回のレポート)

```
//waveファイルのロード
wave = loadwave('●●●.wav');

//1000ステップごとのエコーを10回重ねる例
out=[];
for i=0:9,
  out=out+[zeros(1,1000*i), wave, [zeros(1,9000-1000*i)]];
end
```

レポート課題:ヒント

(2)その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出).

```
time=length(out);
auto_correlation=zeros(1,time);

for tau=1:time,
    auto_correlation(tau) =
end

plot(auto_correlation);
```

自己相関の定義式から、[zeros(1,tau), out] と [out, zeros(1,tau)] の内積を取れば良い。(ベクトルの内積はどう書き表せるか？)

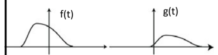
レポート課題：ヒント

(3) ウイナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

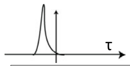
```
//フーリエ変換
fourier =            //過去のレポート課題を参照
//パワースペクトル
power_spec =         //過去のレポート課題を参照
//自己相関
auto_correlation =   //逆フーリエ変換

plot(auto_correlation);
```

※（参考）(2)(3)の結果の微妙な違いは、(3)が**<u>信号の無限繰り返しを仮定している</u>**ために生じる。逆に(2)もそう仮定すれば(3)と全く同じ結果が得られる

（発展トピック）相互相関と検波

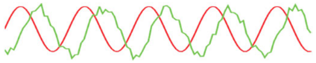


$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

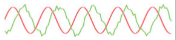


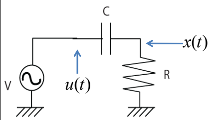
$R_{fg}(\tau)$が最大の値をとるτ
＝元の関数f(t)とg(t)のズレ
（ただし直流成分を取り除いた後）

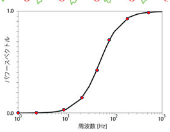
実用上重要なケースの一つ：
●f(t)が正弦波（入力）で，
●g(t)がノイズが入って位相が遅れた正弦波（出力）



正弦波入出力の例（1）

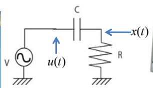




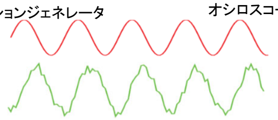


フィルタ回路：入力u(t)，出力x(t)
電子回路，アンテナ，ロボットアーム，etc
フィルタ特性を実測で求める場合
●u(t)=sin(ωt)を入力し，
●出力を観察する．
ωを変化させることでフィルタ特性を得る．

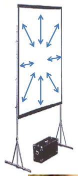
正弦波入出力の例（1）

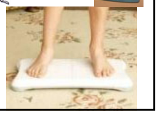


ファンクションジェネレータ　　オシロスコープ

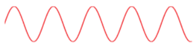


正弦波入出力の例（2）

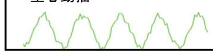




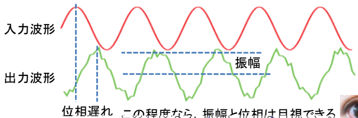
オプティカルフローの速度



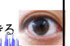
重心動揺

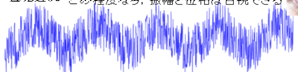


入力と出力の位相差，振幅比を求める



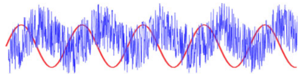
この程度なら，振幅と位相は目視できる





でもたいていこういう残念な感じ．ノイズがひどい
⇒振幅と位相を，どうやって求めたら良い？
方法1：バンドパスフィルタを使う
方法2：相関関数を考える

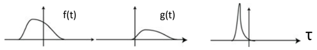
正弦波による相互相関



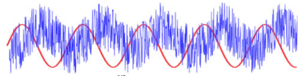
●出力信号f(t)：ノイズだらけの正弦波．位相不明．周波数は既知．
●入力信号g(t)：周波数固定の正弦波

g(t)を動かしていき，ピタリと重なるところを見つければ良い
⇒相互相関の計算にほかならない．

$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$



正弦波による相互相関



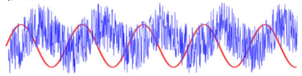
$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

正弦波g(t)を動かす

$$R_{fg}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t+\tau)dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T$$
$$=$$

つまり正弦波の場合，積分の計算は2回やるだけでよい！！

直交検波

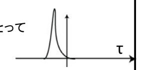


$$R_{fg}(\tau)=\cos(\omega\tau)\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega t)dt+\sin(\omega\tau)\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt$$

積分結果をS,Cと書いて

$$R_{fg}(\tau)=S\cos(\omega\tau)+C\sin(\omega\tau)$$

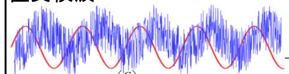
これが最大の値をとる場所τは，微分をとって

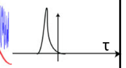


$$\frac{dR_{fg}(\tau)}{d\tau}= \qquad =0$$

$\therefore$ 　⇒位相遅れτが求まった

直交検波



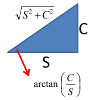


$\therefore \arctan\left(\frac{C}{S}\right)=\omega\tau$ ⇒位相遅れτが求まった

このときの相関値は，

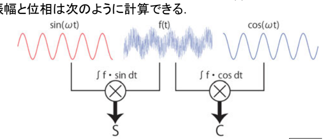
$$R_{fg}(\tau)=S\cos(\omega\tau)+C\sin(\omega\tau)$$
$$=S\cos\left(\qquad\right)+C\sin\left(\qquad\right)$$
$$=S \qquad +C$$
$$=$$
$$=$$

⇒振幅に相当する量

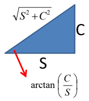


直交検波まとめ

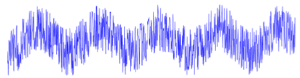
周波数ωがわかっているノイズだらけの信号f(t)があったとき，
振幅と位相は次のように計算できる．



（1）sin(ωt)とcos(ωt)との内積をとり，S，Cとおく．
（2）位相遅れはarctan(C/S)となる．
（3）振幅は$\sqrt{S^2+C^2}$に比例する．



直交検波：もっと数式で理解する



問題を定式化

信号f(t)が，

f(t) =

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている．

計測データから，振幅Aと，位相ずれφを求めるには？

直交検波:さらに数式で理解する

信号にsin(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

積分時間Tは充分長い.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\big)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T} \\
&= \frac{1}{T} \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

直交検波:さらに数式で理解する

信号にcos(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

積分時間Tは充分長い.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\big)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t)dt + \cancel{\int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\big(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\big)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\cancel{\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt} + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cancel{\cos(2\omega t)}}{2}dt \\
&=
\end{aligned}
$$

直交検波:さらに数式で理解する

$$S=\frac{A}{2}\cos(\phi) \qquad C=\frac{A}{2}\sin(\phi)$$

このニつの結果から,

位相差

$$\frac{C}{S}=$$

$$\phi=$$

振幅

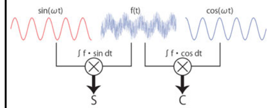
$$
\begin{aligned}
S^2+C^2 &= \frac{A^2}{4}\big(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\big) \\
&= \\
A &=
\end{aligned}
$$

位相差と振幅が求まった

（参考）AMラジオの同期検波

ラジオの信号は，典型的な

「周波数ωがわかっているノイズだらけの信号f(t)」



復調方式の一つ:「同期検波」

直交検波をリアルタイムに行い，ノイズに隠れた真の信号を得る.

今ではPC上で計算可能（ソフトウエア無線技術）

レポート課題2:
ノイズ入り正弦波の位相を調べる

次のScilabソースで表されるノイズ入り正弦波の位相遅れを求め、妥当性をコメントせよ。

```
//ノイズ入り正弦波
t=[0:0.01:5];//時刻
f=1.0; //周波数
amp=0.5;//振幅
phi=0.3*%pi; //位相遅れ
y=sin(2*%pi*f*t+phi) + rand(t);
plot(t,y);

S =                 //yとsinの内積
C =                 //yとcosの内積
ans_phi=atan(C,S) //検出された位相遅れ
```