

インタラクティブシステム論 第5回

梶本裕之



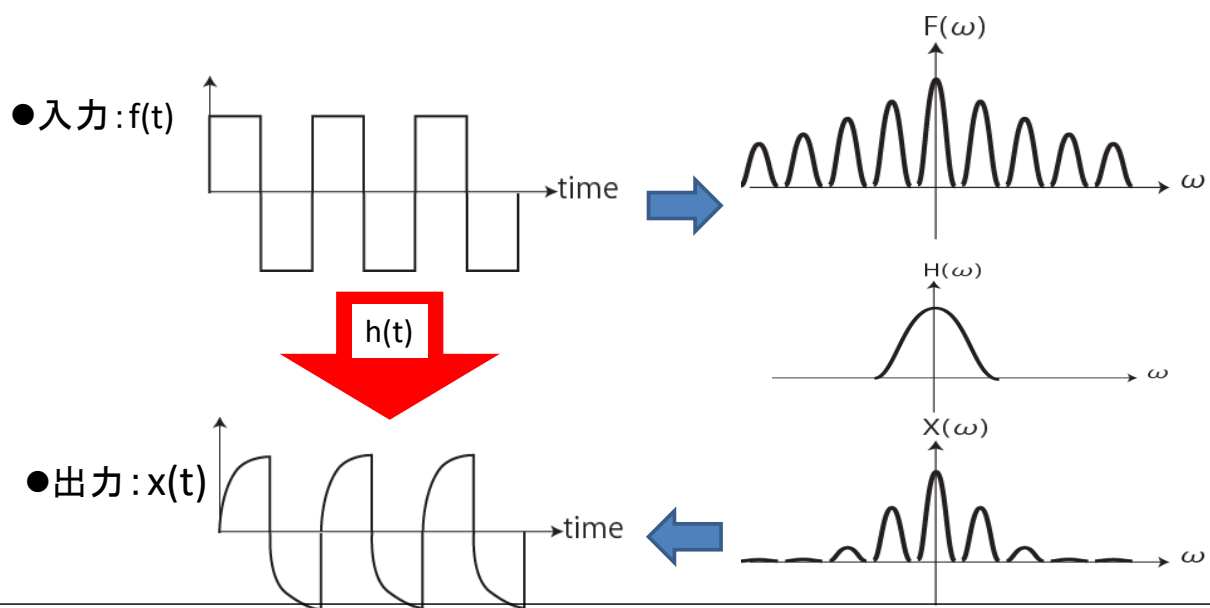
日程



講義番号	講義日	講義内容
-	5/8	休講 (全学のオンライン講義説明会)
1	5/15	イントロダクション Scilab課題 上記資料のPython版
2	5/22	フーリエ変換
3	5/29	フーリエ変換と線形システム
4	6/5	信号処理の基礎
5	6/12	信号処理の応用1(相関)
6	6/19	信号処理の応用2(画像処理)
-	6/26	中間確認テスト (現在のところ大学を予定) 自習に変更
7	7/3	ラプラス変換
8	7/10	古典制御の基礎
9	7/17	行列
10	7/24	行列と最小二乗法
11	7/31	ロボティクス
-	8/7	期末テスト準備 (自習)
-	8/14	期末確認テスト (現在のところ大学を予定)



(復習) 周波数領域ではなく、 時間領域のまま議論できないか？



$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$: 周波数領域で美しいのは分った。
時間的な現象として何が起きているのか分からない

(復習) 式で考えよう

$$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$$

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau \right) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega(t - \tau)) d\omega \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$



逆順の計算もしておく(ふつうはこちら)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

両辺をフーリエ変換.

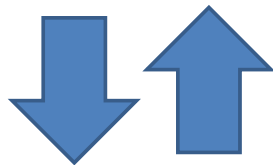
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega(\tau + (t-\tau)))dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) \cdot \exp(-j\omega(t-\tau))dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega(t-\tau))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\exp(-j\omega t')dt' \\ &= F(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$



(復習)コンボリューション定理

$$X(\omega) = F(\omega)H(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

フーリエ逆変換



フーリエ変換

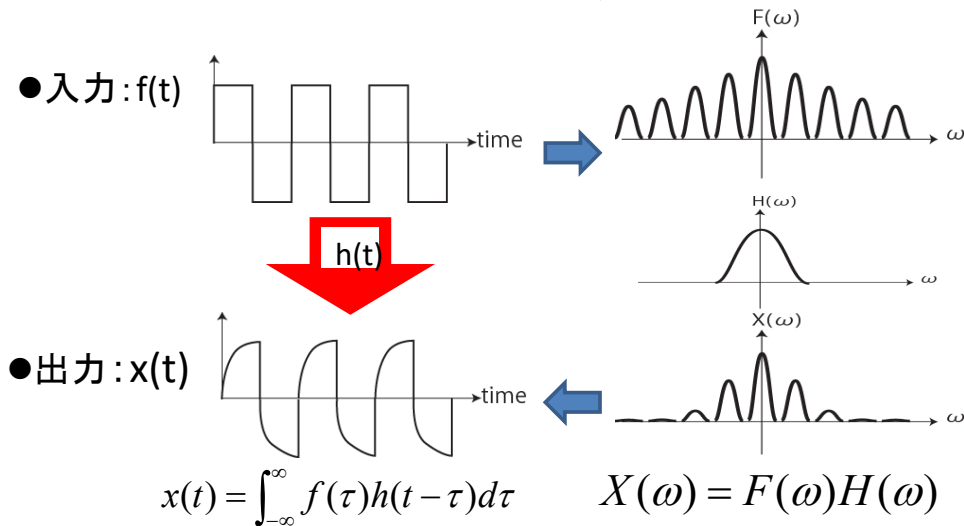
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

簡略化のため次のようにも表記される

$$x(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$$



(復習)コンボリューション定理の意味(1)

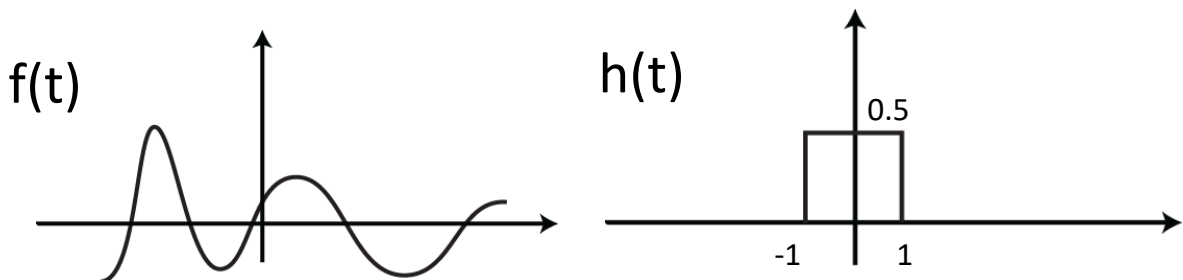


- $h(t)$ のフーリエ変換が $H(\omega)$ であるとする。
- 周波数領域でフィルタ $H(\omega)$ をかけることは、時間領域では、入力信号 $x(t)$ に対する関数 $h(t)$ の畳み込み積分(コンボリューション)として表現される。



(復習)コンボリューション定理の意味(2)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$



例えば, $h(t)=0.5$ $(-1 < t < 1)$ なら,

$$x(t) = \int_{-1}^1 0.5f(t-\tau)d\tau$$

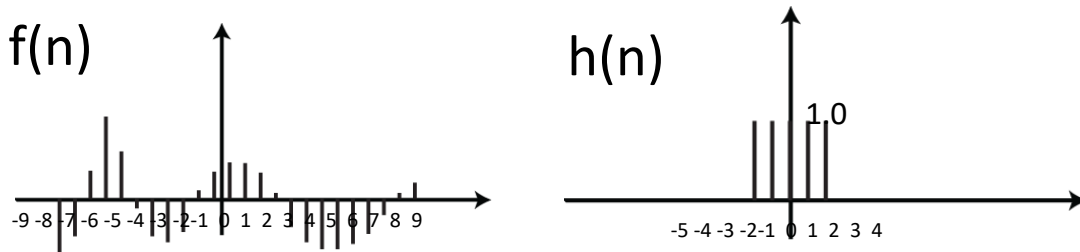
これは, $f(t)$ を平均化していくフィルタ



(復習) 離散化による理解

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad \longrightarrow \quad x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) f(n - i)$$

$$x(n) = \dots + h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) + \dots + h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4) + \dots$$



$h(n)$ が、 $n=-2 \sim 2$ の間だけ1の場合、

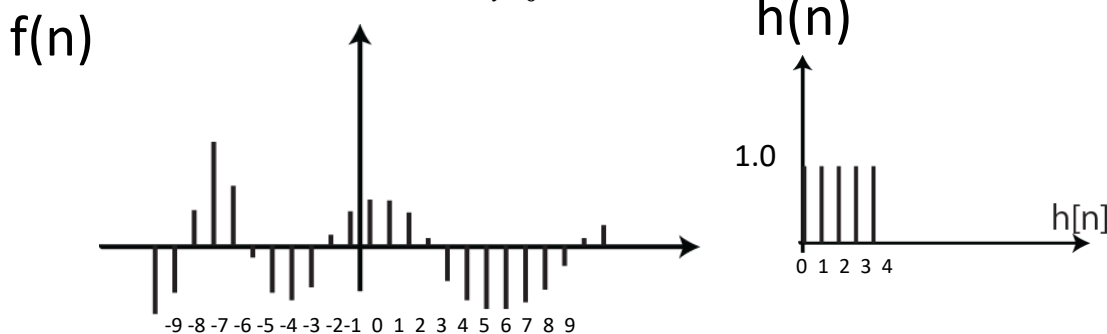
$$x(n) = f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)$$

- この場合、出力 x は、入力 f の「平均化」になっている。
- つまりこの場合、 h は平滑化フィルタである。



(復習) FIRフィルタ

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) f(n - i)$$



$i=0$ から始める: 未来のデータが使えないことを意味する。
この例は、元データ $f(n)$ を、4個平均して出力する。

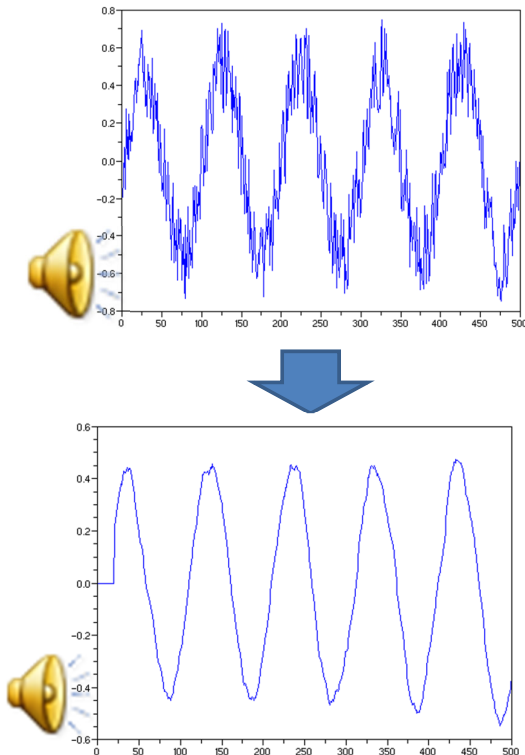
- 未来のデータが使えない例: リアルタイム制御
- 先のデータが使える例: 画像処理



(復習) 平滑化フィルタの実例

メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化

Scilabコード例



```

time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
    for i=0:19,
        out(n)=out(n)+wave(n-i)/20;
    end
end

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
    
```



(復習) エコー

エコー＝時間遅れ信号の重畳.
これはFIRフィルタで実装できる.

Scilabコード例

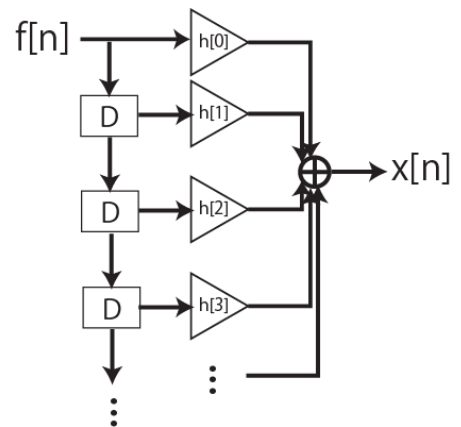
```

wave = loadwave('aiueo.wav');

out=zeros(wave);

//エコー(1000ステップ前の信号を重畳)
for n=1000:length(wave),
    out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end

playsnd(out,11000); //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
    
```



原音



1000ステップ前の信号を重畳



1000ステップ前+2000ステップ前の信号を重畳



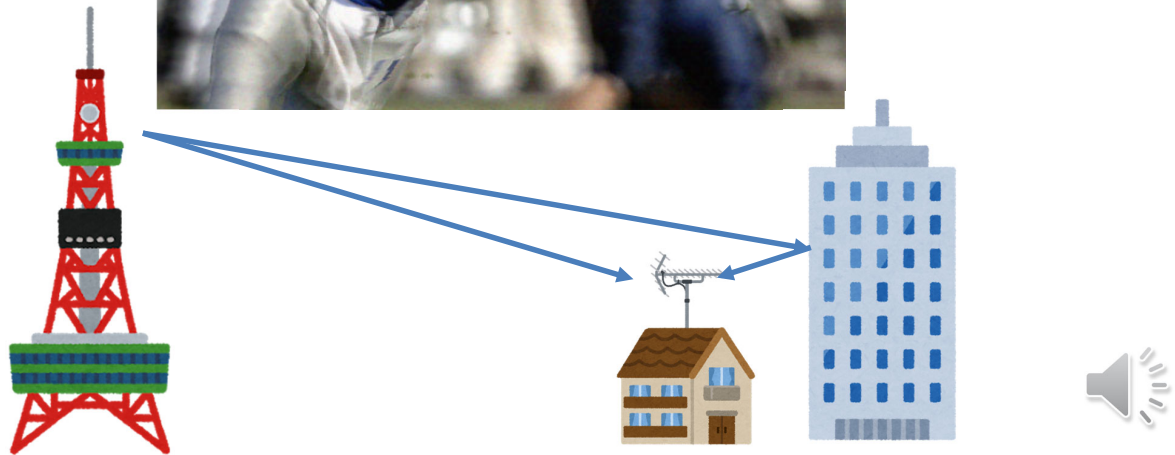
沢山重畳



エコーは害(ゴースト障害／ゴースト現象)



<https://ja.wikipedia.org/wiki/ゴースト障害>



相互相関関数
自己相関関数



エコーキャンセル(テレビだとゴーストリダクション)

FIRフィルタによってエコーの影響を低減することができる。

考え方:

(1) エコー成分のモデルを推定

$$\text{out}(n) = \text{wave}(n) + 0.5 * \text{wave}(n-100);$$

「100ステップ前の信号が0.5のゲインで重畳されている!」

(2) そのモデルに基づき、エコー成分と逆のゲインをかける

$$\text{out}(n) - 0.5 * \text{out}(n-100)$$

$$= \text{wave}(n) + 0.5 * \text{wave}(n-100) - 0.5 * (\text{wave}(n-100) + 0.5 * \text{wave}(n-200))$$

$$= \text{wave}(n) + 0.25 * \text{wave}(n-200)$$

⇒エコーが半分に低減!

(3) 当然もっと工夫すれば... (もっとメモリがあれば)

$$\text{out}(n) - 0.5 * \text{out}(n-100) - 0.25 * \text{out}(n-200)$$

$$= \dots = \text{wave}(n) + 0.125 * \text{wave}(n-300)$$

⇒無限にメモリがあれば完璧に消せる。



エコーキャンセルの課題

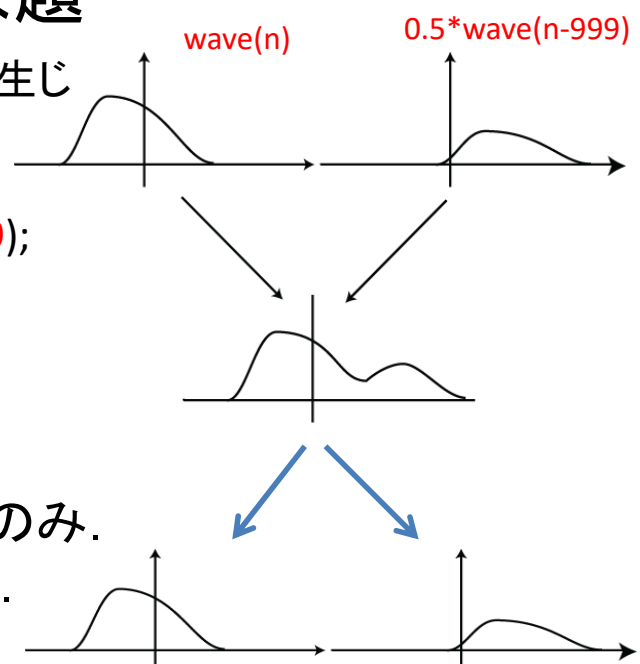
エコー成分が、どれだけ時間遅れを生じてやってくるかの**モデルを推定**

$$\text{out}(n) = \text{wave}(n) + 0.5 * \text{wave}(n-999);$$

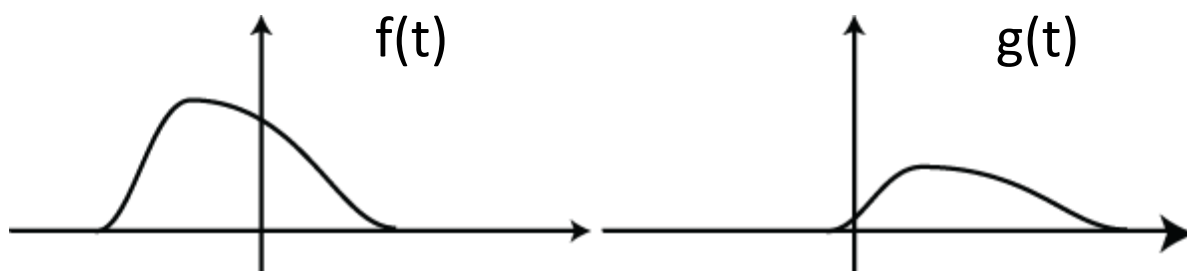
<問題>

観測できるのは、
エコーの「結果」としてのout(n)のみ。
元の信号はわかっていない。

この信号からどのように、
モデルを推定するのか?



より簡単な問題から考えよう



二つの信号が,

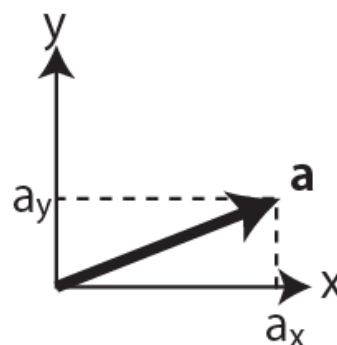
- 時間的にどれだけずれているのか
 - 時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか
- を測定したい.



(復習)ベクトル空間と内積

ベクトル $\mathbf{a}=[a_x, a_y]$ のx成分は? a_x

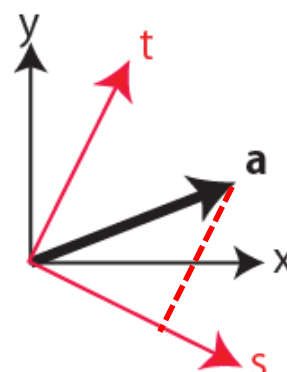
これはベクトル \mathbf{a} とベクトル $\mathbf{x}=[1,0]$ との内積である.



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = [a_x, a_y] \cdot [1, 0] = a_x$$

回転した座標軸, s, t を考える.
ベクトル $\mathbf{a}=[a_x, a_y]$ の, s 成分は?

これはベクトル \mathbf{a} とベクトル $\mathbf{s}=[s_x, s_y]$ との内積である.

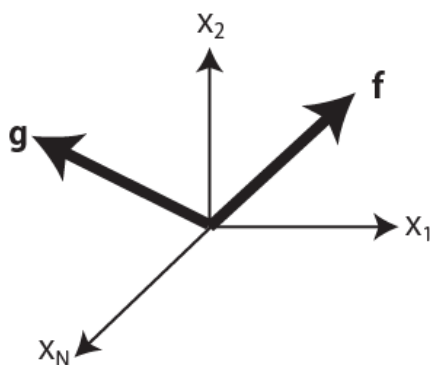


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = [a_x, a_y] \cdot [s_x, s_y]$$

内積は、あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

(復習) N次元空間では

N次元空間で、二つのベクトル
 $f=[f_1, f_2, \dots, f_N], g=[g_1, g_2, \dots, g_N]$ を考える.



内積 $f \cdot g$ は、ベクトル f の、 g 軸成分(または逆)を表す.

$$\begin{aligned} &= [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N] \bullet [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_N] \\ &= \sum_{i=1}^N f_i g_i \end{aligned}$$



(復習) 波形 f に波形 g はどれだけ含まれるか

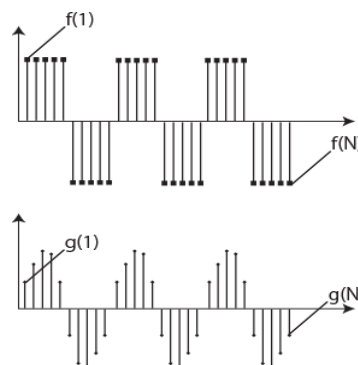
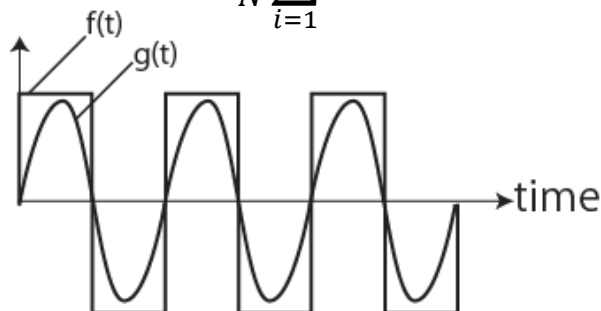
波形 f 中の、波形 g の成分

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt$$

(連続関数) 複素数の場合も考えて共役をとる

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{f(i)} g(i)$$

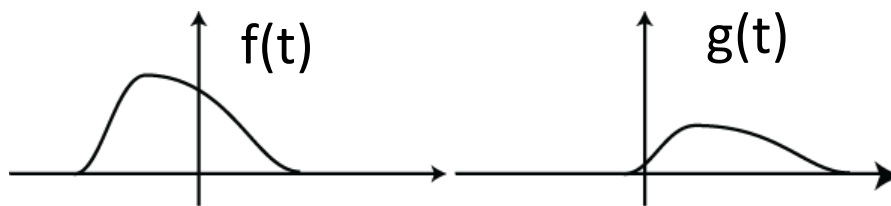
(離散化して考えた場合)



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義



相互相関



<問題>

二つの信号が,

- 時間的にどれだけずれているのか
- 時間のずれを無視したらどれだけ似ているのかを測定したい。

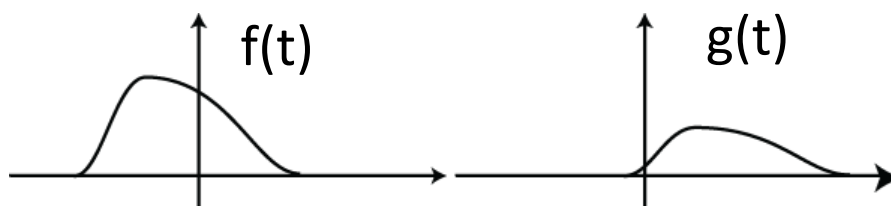
内積を思い出せば,

次の手順で測定すればよいことがわかる

- $g(t)$ を τ だけずらしてみる \Rightarrow
- $f(t)$ との内積を取ってみる \Rightarrow
- τ を変化させていく。

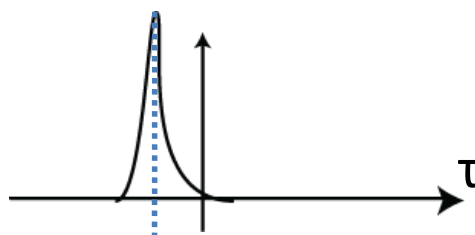


相互相関



$R_{fg}(\tau)$: 二つの関数 $f(t)$, $g(t)$ の, 相互相関関数

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) dt$$

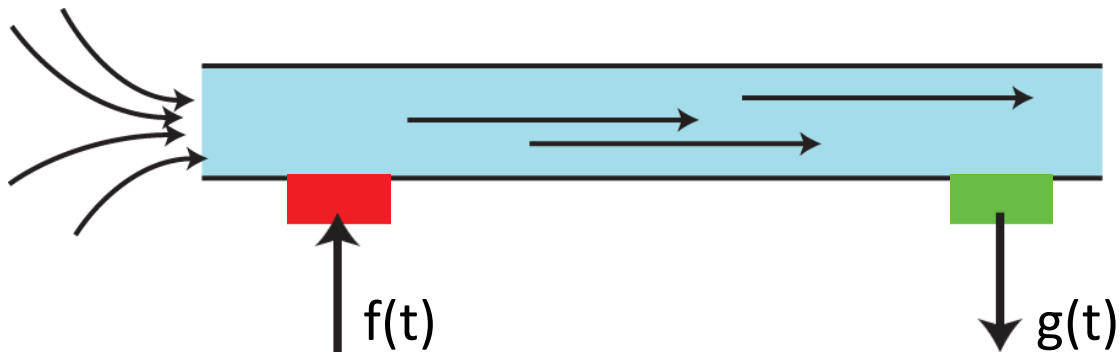


$R_{fg}(\tau)$ が最大の値をとる τ = 元の関数 $f(t)$ と $g(t)$ のズレ
(ただし直流成分を取り除いた後)



相互相関の応用: 速度計測

管内の流速を正確に測定したい
ただし、管の中に接触してはいけない(液漏れ厳禁)



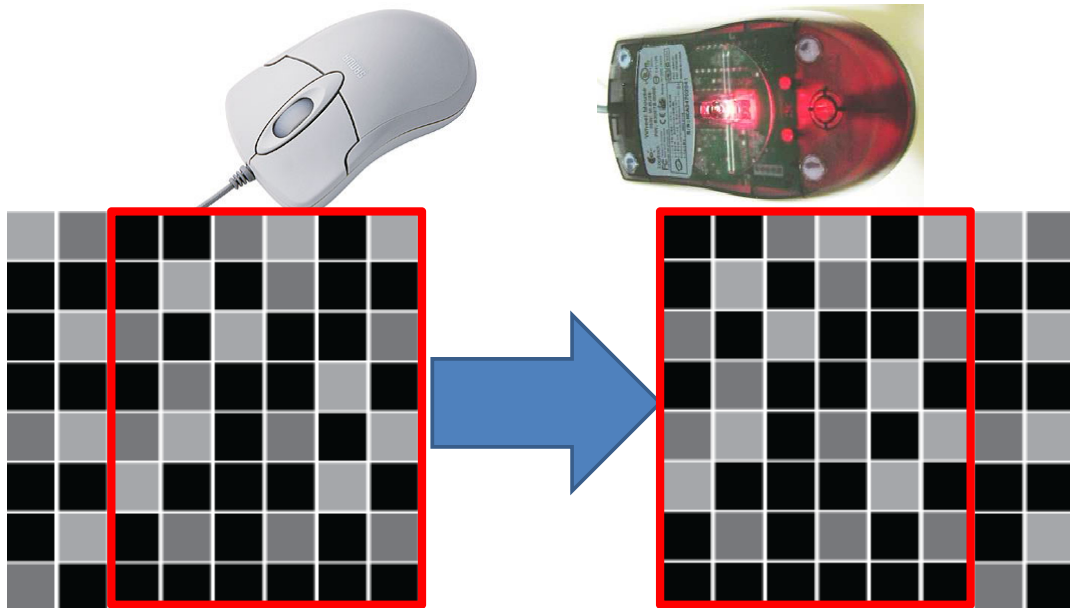
上流に熱源を置き, $f(t)$ でランダムに変動させる.
下流で温度を測定する. $g(t)$

$f(t)$ と $g(t)$ の相互相関関数が最大となる時間差 τ が,
水流によって熱が移動するのに要する時間である.



相互相関の応用: 速度計測

光学式マウスの中身 = 16x16 pixel のCMOSカメラ



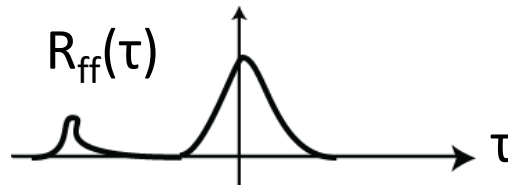
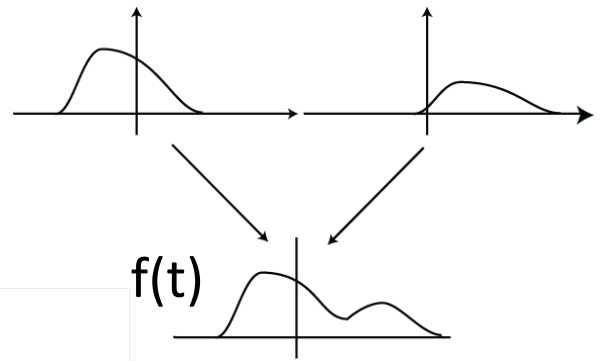
二つの画像 (= 2次元関数) 同士の相互相関を取ることで
移動量を計測する. 自動車の速度計測等にも利用.



自己相関

二つの関数 $f(t)$, $g(t)$ の代わりに、
ひとつの関数 $f(t)$ の相関を取る。

$$R_{ff}(\tau) =$$



自己相関関数は、
「どれだけずれたら自分自身に近い形になるか」
を表す。

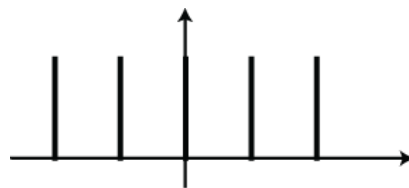
すなわち、**エコー**を発見していることに他ならない。



周期関数の自己相関



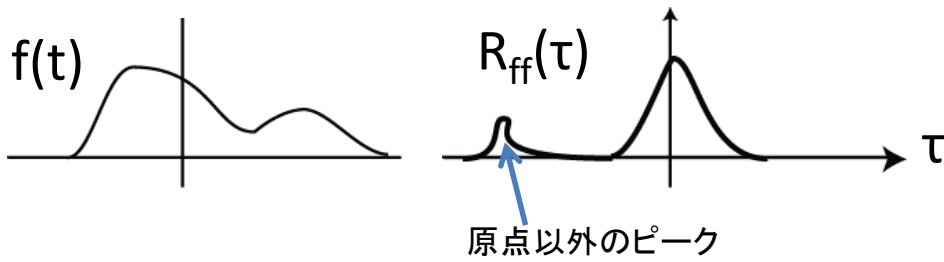
$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(t + \tau) dt$$



周期関数の自己相関関数は沢山のピークが出る



自己相関まとめ

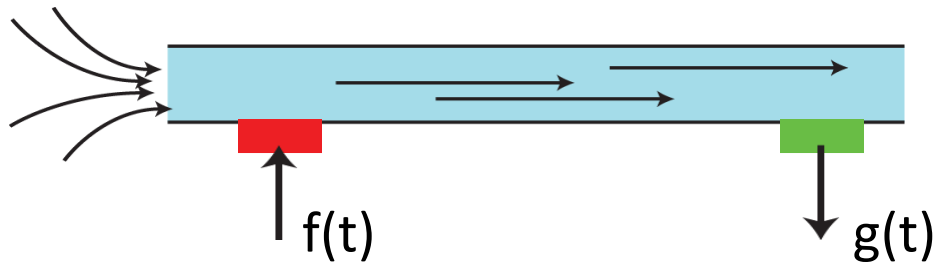


$R_{ff}(\tau)$: 自分自身を τ ずらしたら、自分自身にどれだけ似ているか

- 当然, $\tau=0$ で最大値を取る.
- $\tau \neq 0$ で大きな値をとった場合, その信号には τ の時間遅れ(エコー)成分が含まれている.
- 信号に潜む周期性を発見することもできる



白色雑音(ホワイトノイズ)と自己相関

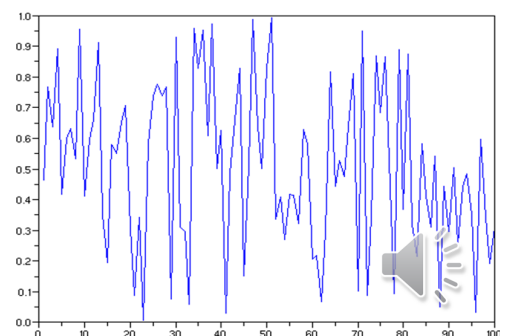


元の信号 $f(t)$ に「周期性」があったら, $f(t)$ と $g(t)$ の相互相関は沢山の「ニセのピーク」が出てしまう.

元の入力 $f(t)$ はなるべく「でたらめ」であることが望ましい \Rightarrow 白色雑音

<白色雑音の定義>

1. あらゆる周波数成分が均等に含まれる.
2. 自己相関関数が $\tau=0$ 以外では全て0
(=エコー成分, 周期性を全く持たない)



自己相関とパワースペクトル

自己相関関数をフーリエ変換する $R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(t + \tau) dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(t + \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

=

=

=

=

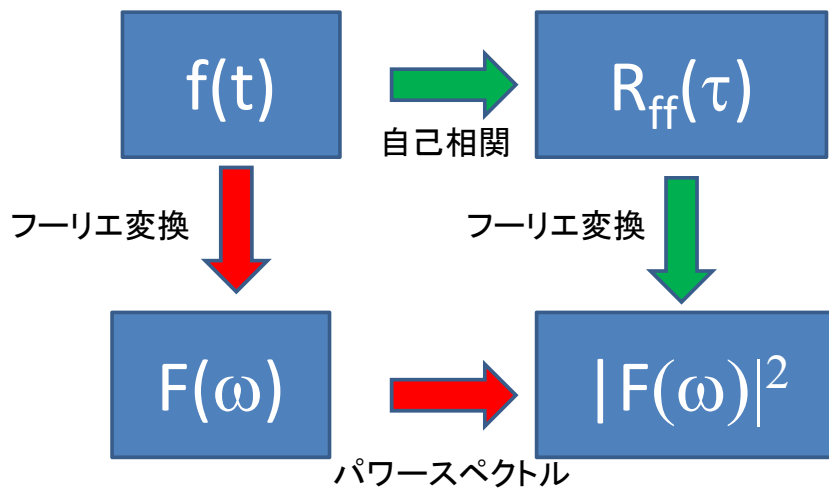
=



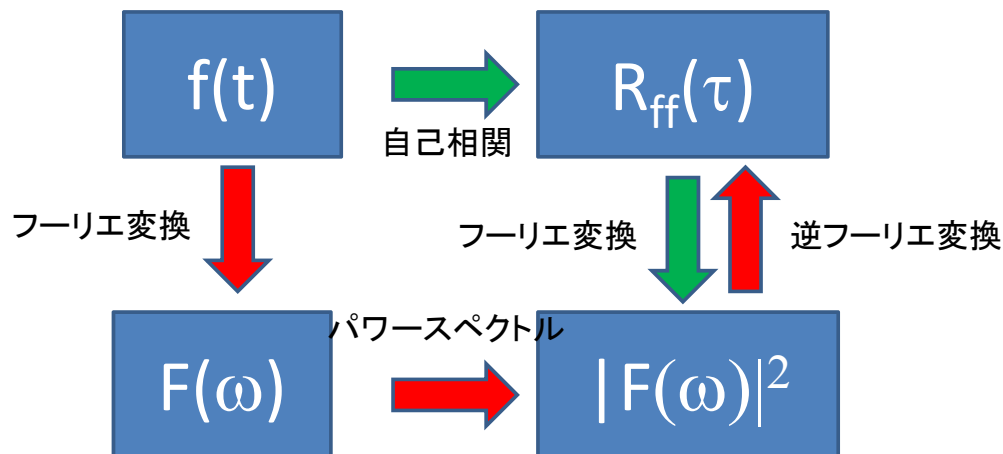
自己相関とパワースペクトル

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \|F(\omega)\|^2$$

ウィナー・ヒンチンの定理



自己相関とパワースペクトル



自己相関は
フーリエ変換⇒パワースペクトル⇒逆フーリエ変換
によって間接的に計算できる

- 自己相関を直接計算した時の計算量: $O(n^4)$
- フーリエ変換(FFT)を使った時の計算量: $O(n \log(n))$
この方が計算が早いため多用される。



レポート課題1: 自己相関

- (1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようになる。(前回のレポート)
 - (2) その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)。
 - (3) ウィナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する
- (2)(3)のScilab (or python)ソースファイルの添付. waveファイルは添付不要。(2)(3)の処理にかかった時間についてコメント



レポート課題: ヒント

(3) ウィナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

//フーリエ変換

fourier = //過去のレポート課題を参照

//パワースペクトル

power_spec = //過去のレポート課題を参照

//自己相関

auto_correlation = //逆フーリエ変換

plot(auto_correlation);

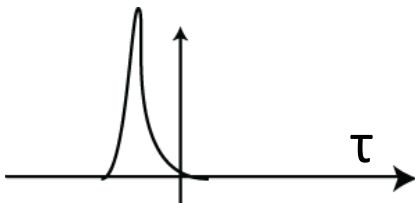
※(参考)(2)(3)の結果の微妙な違いは、(3)が信号の無限繰り返しを仮定しているために生じる。逆に(2)もそう仮定すれば(3)と全く同じ結果が得られる



(発展トピック) 相互相関と検波



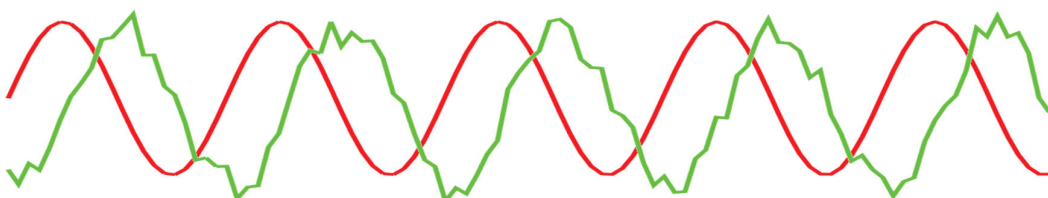
$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) dt$$



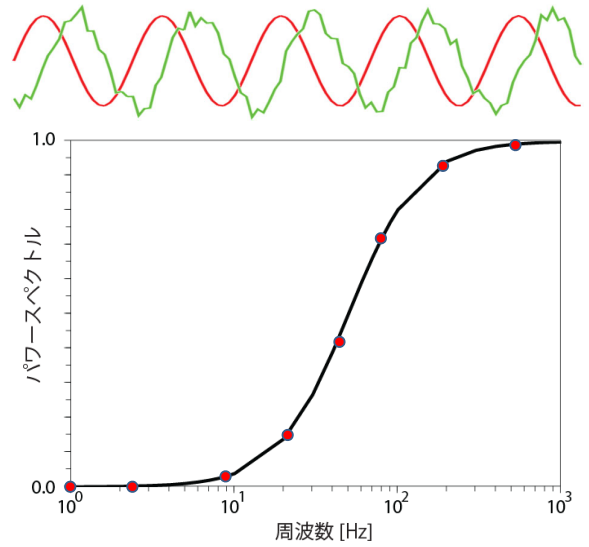
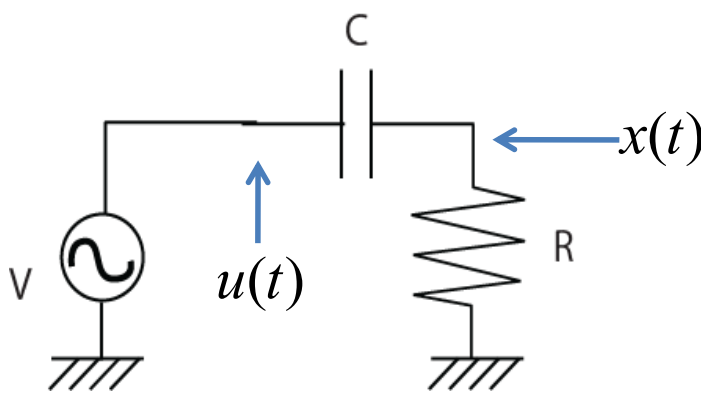
$R_{fg}(\tau)$ が最大の値をとるτ
=元の関数f(t)とg(t)のズレ
(ただし直流成分を取り除いた後)

実用上重要なケースの一つ:

- f(t)が正弦波(入力)で,
- g(t)がノイズが入って位相が遅れた正弦波(出力)



正弦波入出力の例(1)



フィルタ回路: 入力 $u(t)$, 出力 $x(t)$

電子回路, アンテナ, ロボットアーム, etc

フィルタ特性を実測で求める場合

● $u(t)=\sin(\omega t)$ を **入力** し,

● **出力** を観察する.

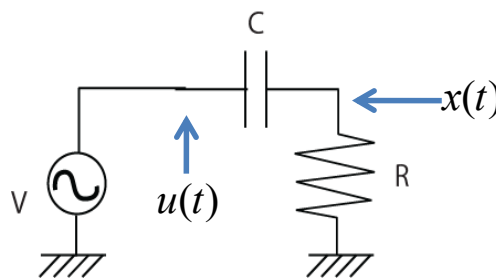
ω を変化させることでフィルタ特性を得る.



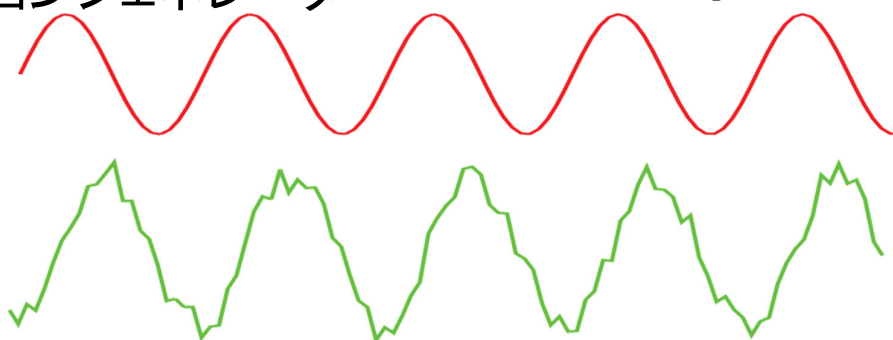
正弦波入出力の例(1)



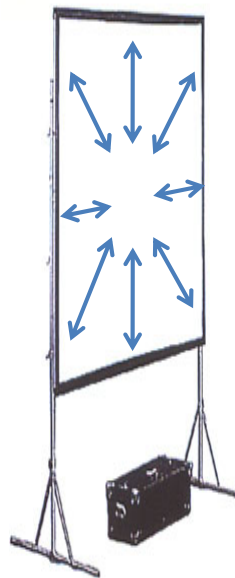
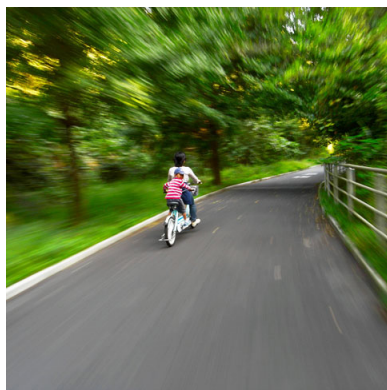
ファンクションジェネレータ



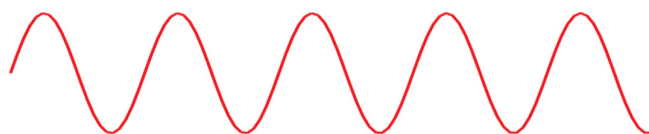
オシロスコープ



正弦波入出力の例(2)



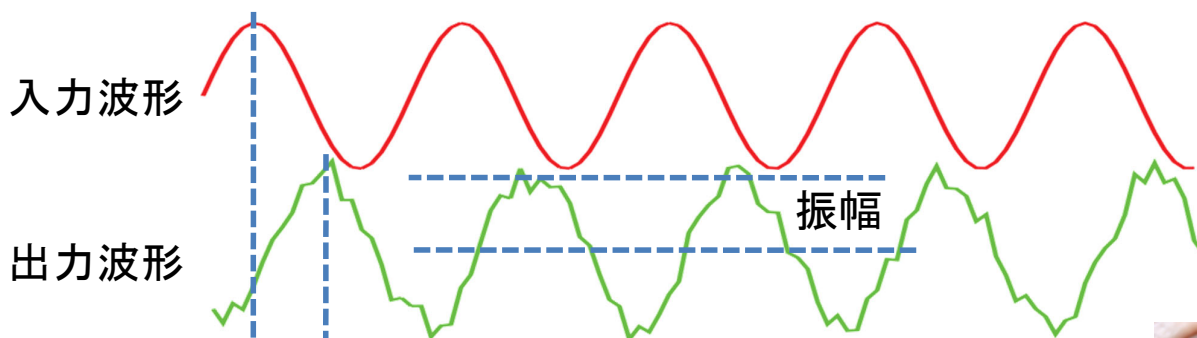
オプティカルフローの速度



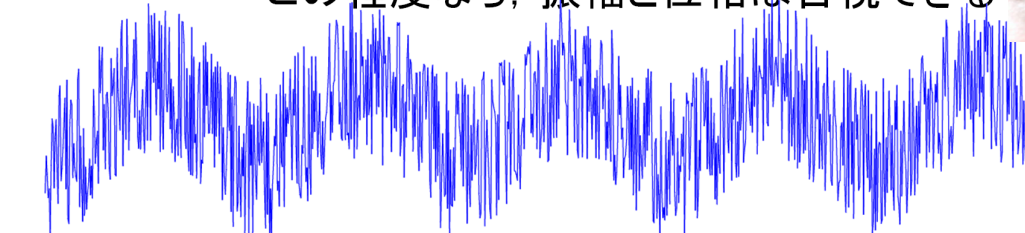
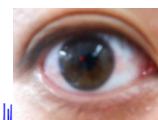
重心動揺



入力と出力の位相差, 振幅比を求める



位相遅れ この程度なら, 振幅と位相は目視できる



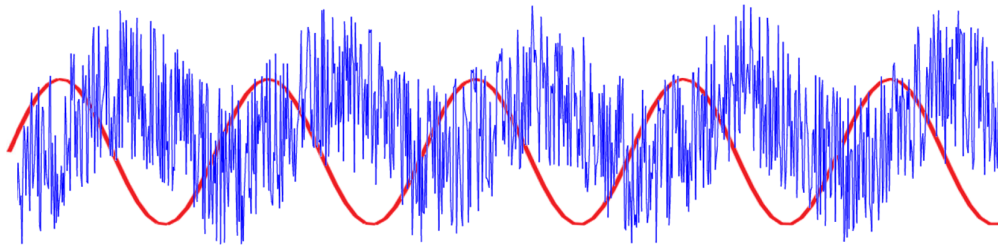
でもたいていこういう残念な感じ. ノイズがひどい
⇒振幅と位相を, どうやって求めたら良い?

方法1: バンドパスフィルタを使う

方法2: 相関関数を考える



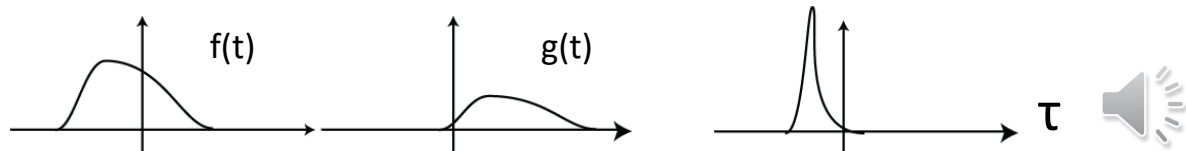
正弦波による相互相関



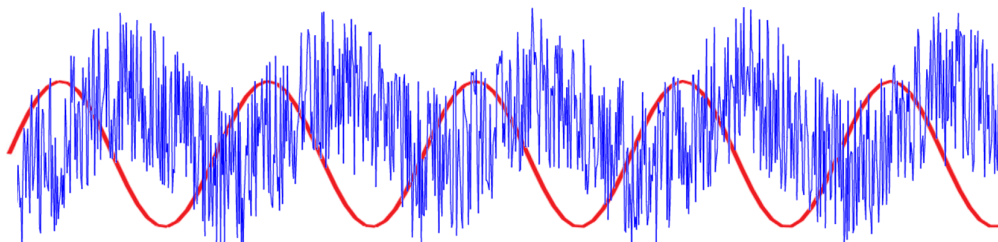
- 出力信号 $f(t)$:ノイズだらけの正弦波. 位相不明. 周波数は既知.
- 入力信号 $g(t)$:周波数固定の正弦波

$g(t)$ を動かしていき, ピタリと重なるところを見つければ良い
 \Rightarrow 相互相関の計算にほかならない.

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t + \tau)dt$$



正弦波による相互相関



$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t + \tau)dt$$

正弦波 $g(t)$ を動かす

$$R_{fg}(\tau) =$$

=

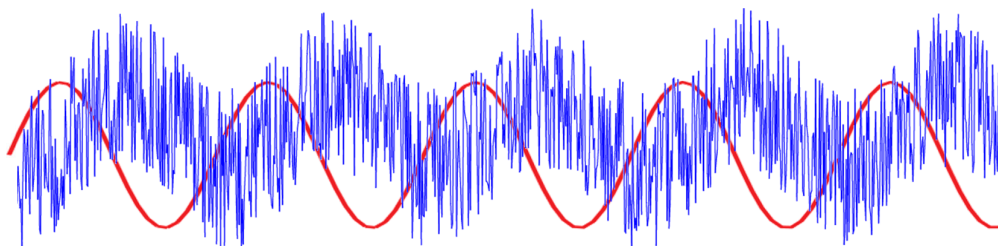
=

=

つまり正弦波の場合, 積分の計算は2回やるだけでよい!!



直交検波



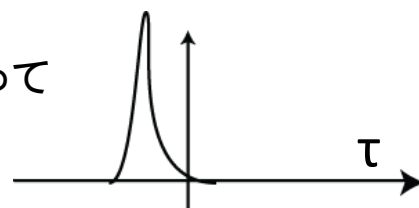
$$R_{fg}(\tau) = \cos(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega t) dt + \sin(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt$$

積分結果をS,Cと書いて

$$R_{fg}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

これが最大の値をとる場所 τ は、微分をとって

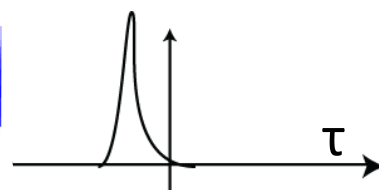
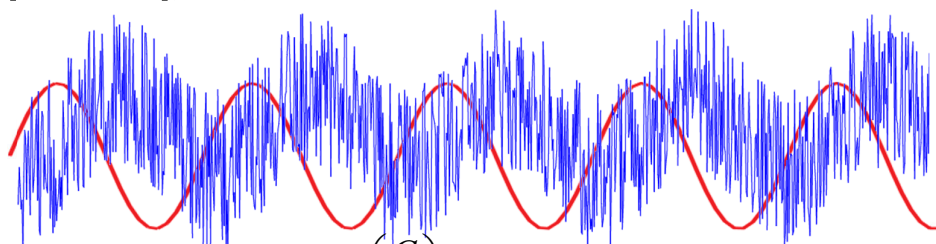
$$\frac{dR_{fg}(\tau)}{d\tau} = \boxed{} = 0$$



$$\boxed{} \therefore \boxed{}$$

⇒位相遅れ τ が求まった

直交検波



$$\therefore \arctan\left(\frac{C}{S}\right) = \omega\tau \Rightarrow \text{位相遅れ}\tau\text{が求まった}$$

このときの相関値は、

$$R_{fg}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

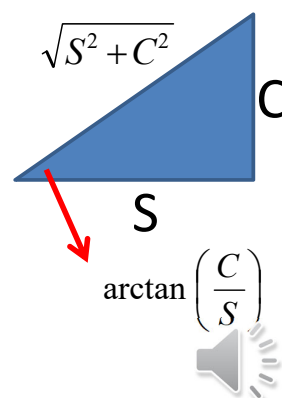
$$= S \cos\left(\boxed{}\right) + C \sin\left(\boxed{}\right)$$

$$= S \boxed{} + C \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

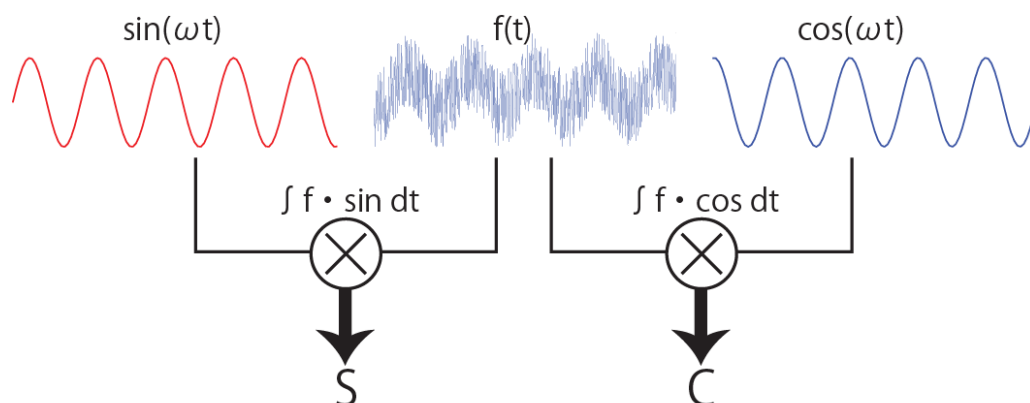
$$= \boxed{}$$

⇒振幅に相当する量

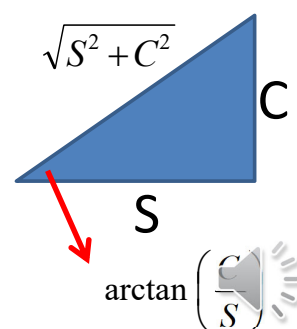


直交検波まとめ

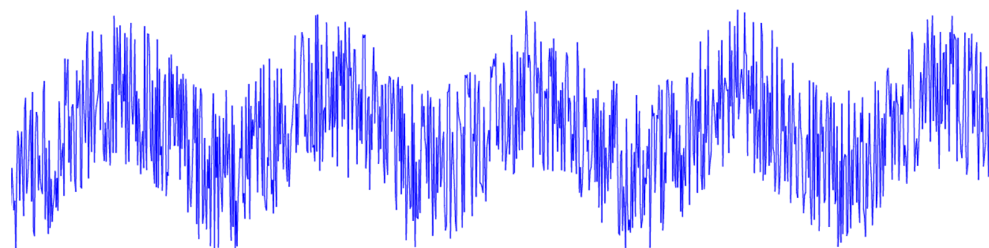
周波数 ω がわかっているノイズだらけの信号 $f(t)$ があったとき、振幅と位相は次のように計算できる。



- (1) $\sin(\omega t)$ と $\cos(\omega t)$ との内積をとり、 S 、 C とおく。
- (2) 位相遅れは $\arctan(C/S)$ となる。
- (3) 振幅は $\sqrt{S^2+C^2}$ に比例する。



直交検波：もっと数式で理解する



問題を定式化

信号 $f(t)$ が、

$f(t) =$

と仮定できるとする。周波数 ω はわかっている。

計測データから、振幅 A と、位相ずれ ϕ を求めるには？ 

直交検波: さらに数式で理解する

信号に $\sin(\omega t)$ をかけ, 積分する(=内積をとる)
積分時間 T は充分長い.

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot$$

$$= \frac{1}{T} \cdot$$

=

=

=



直交検波: さらに数式で理解する

信号に $\cos(\omega t)$ をかけ, 積分する(=内積をとる)
積分時間 T は充分長い.

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt$$

$$= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

$$= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt$$

=



直交検波: さらに数式で理解する

$$S = \frac{A}{2} \cos(\phi) \quad C = \frac{A}{2} \sin(\phi)$$

この二つの結果から,

位相差

$$\frac{C}{S} =$$

$$\phi =$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

=

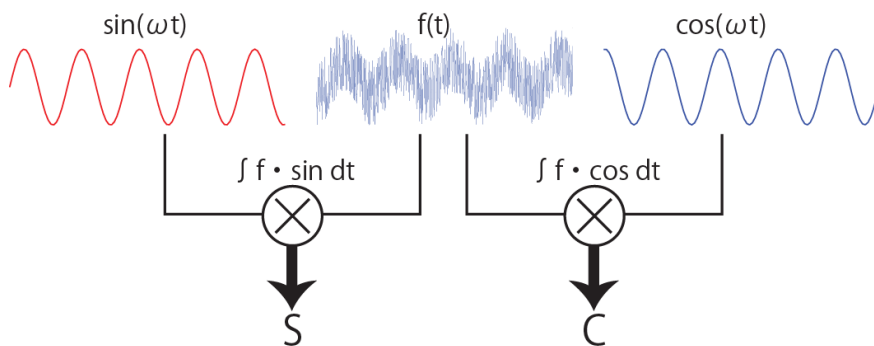
$$A =$$

位相差と振幅が求まった



(参考) AMラジオの同期検波

ラジオの信号は、典型的な
「周波数 ω がわかっているノイズだらけの信号 $f(t)$ 」



復調方式の一つ: 「同期検波」

直交検波をリアルタイムに行い, **ノイズに隠れた真の信号**を得る.

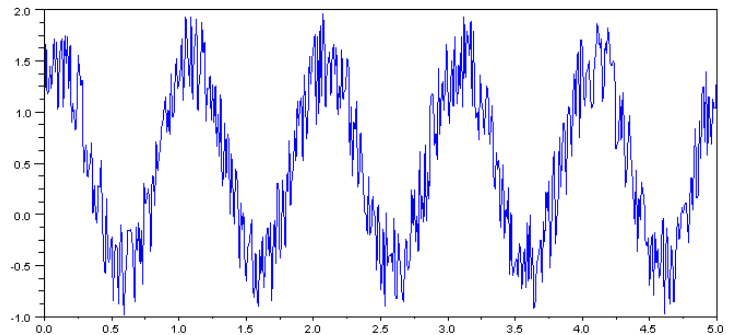
今ではPC上で計算可能(ソフトウェア無線技術)



レポート課題2: ノイズ入り正弦波の位相を調べる

次のScilabソースで表されるノイズ入り正弦波の位相遅れを求め、妥当性をコメントせよ。

```
//ノイズ入り正弦波  
t=[0:0.01:5]; //時刻  
f=1.0; //周波数  
amp=0.5; //振幅  
phi=0.3*%pi; //位相遅れ  
y=sin(2*%pi*f*t+phi) + rand(t);  
plot(t,y);
```



```
S =  //yとsinの内積  
C =  //yとcosの内積  
ans_phi=atan(C,S) //検出された位相遅れ
```

