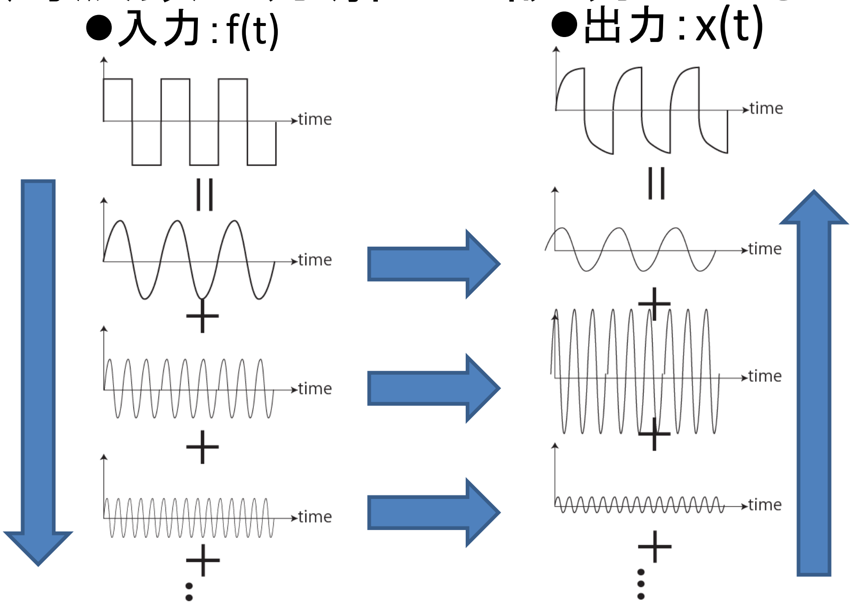
インタラクティブシステム論
第7回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容
-	5/8	休講（全学のオンライン講義説明会）
1	5/15	イントロダクション
		Scilab課題
		上記資料のPython版
2	5/22	フーリエ変換
3	5/29	フーリエ変換と線形システム
4	6/5	信号処理の基礎
5	6/12	信号処理の応用1(相関)
6	6/19	信号処理の応用2(画像処理)
-	6/26	中間確認テスト（~~現在のところ大学を予定~~）自習に変更
7	7/3	ラプラス変換
8	7/10	古典制御の基礎
9	7/17	行列
10	7/24	行列と最小二乗法
11	7/31	ロボティクス
-	8/7	期末テスト準備（自習）
-	8/14	期末確認テスト（現在のところ大学を予定）

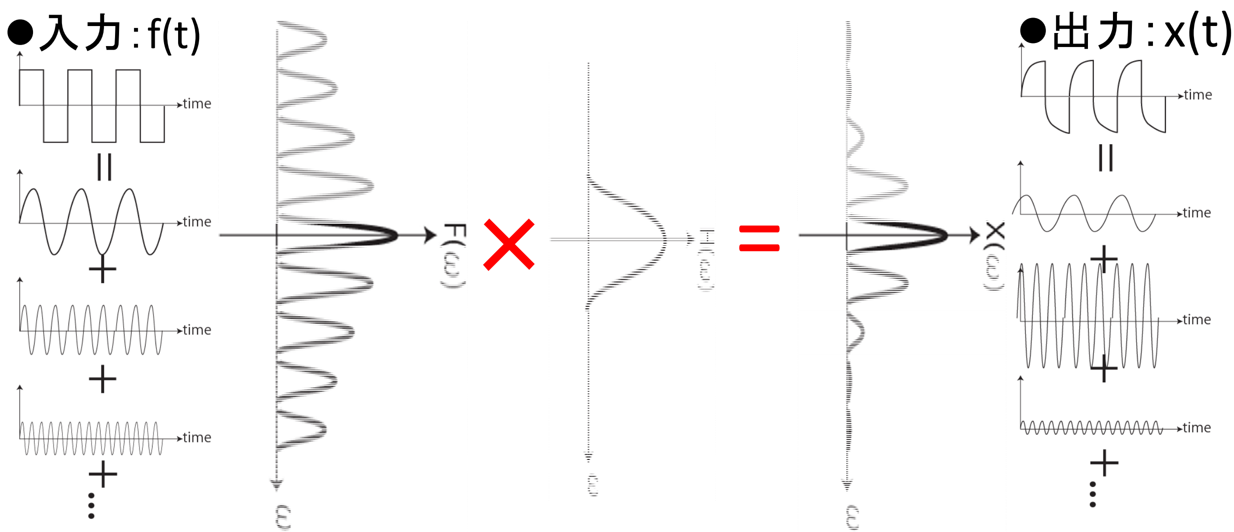
（復習:フーリエ級数展開）
歪みを周波数で分解して説明できる



（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める.
（3）合計すると出力が得られる.

これを連続関数で考えるとどうなるか？

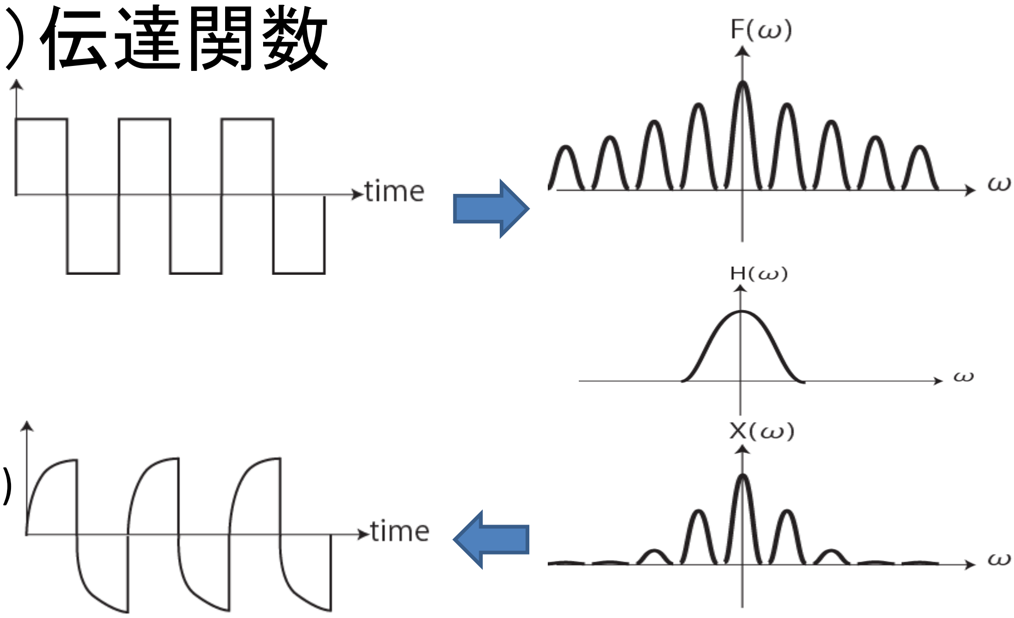
（復習:フーリエ変換）
入出力の関係:関数同士の掛け算



（1）入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
（2）周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか:H(ω)
（3）出力（のフーリエ変換）:X(ω)=H(ω)*F(ω)
（4）逆フーリエ変換すると出力が得られる:x(t)

（復習）伝達関数

●入力：f(t)



●出力：x(t)

フーリエ空間では，入出力は単なる掛け算で表される．

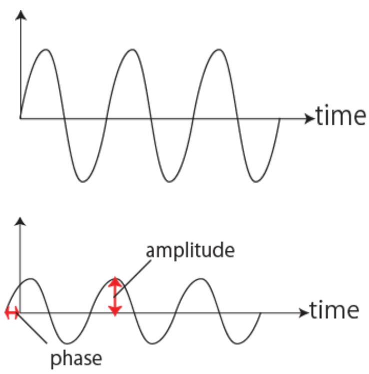
$$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$$

この入出力関係を定義するシステムの性質H(ω)を
伝達関数と呼ぶ．

（復習）伝達関数H(ω)を求めるには？

$$F(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow X(\omega)$$

H(ω)は，周波数ωの信号を入力したときの
出力の振幅と位相を表す．だから．．．



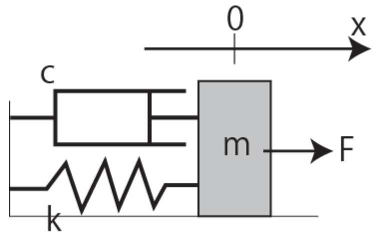
1. ある周波数ωの正弦波を入力．

2. 出力の振幅と位相を測定．
   - 入出力間の振幅の比率amp=|H(ω)|
   - 入出力間の位相差phase＝∠H(ω)

3. この周波数での伝達関数は
   - H(ω)=amp×exp(j*phase)．

4. 周波数を変えて測定すれば，H(ω)が得られる．

（復習）式の上で「計測」



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$f=\exp(j\omega t)$ ●ある周波数2πf=ωの正弦波を**入力**

$x(t)=H(\omega)\exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる**出力**が得られる

このx(t)の微分は？

$$\dot{x}(t)=j\omega H(\omega)\exp(j\omega t)$$
$$=j\omega x(t)=sx(t)$$

同様に2階微分は

$$\ddot{x}(t)=(j\omega)^2 H(\omega)\exp(j\omega t)$$
$$=s^2x(t)$$

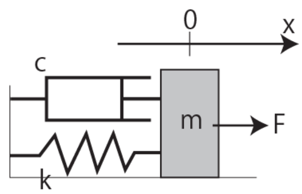
jωと書くのがわずらわしいのでsと書く
（本当はもっと意味があるが，とりあえず）

元の式に代入 $(ms^2+cs+k)H(\omega)\cancel{\exp(j\omega t)}=\cancel{\exp(j\omega t)}$

$$\therefore H(\omega)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

s=jωを代入すれば，
システムの伝達関数に他ならない.

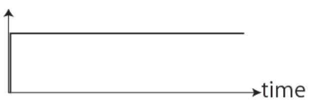
しかし実際は．．．



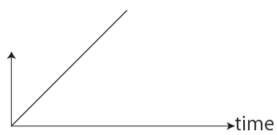
●時刻t≧0だけ考えればよい場合がほとんど（t=0が「初期状態」）

●入力f(t)がフーリエ変換出来ない状況が**普通に**存在する

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$



$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$



$$\int_{t=-\infty}^{\infty}F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty}1\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega}\right]_0^{\infty}$$
$$=\frac{1-\exp(-j\omega\infty)}{j\omega}$$

？？

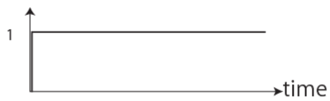
$$\int_{t=-\infty}^{\infty}F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty}t\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\cdots$$

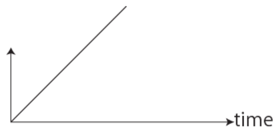
収束しない関数は積分をうまく処理できない（上記の例に関してはδ関数の導入で扱える）

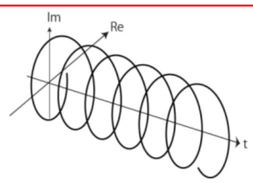
要は，**正弦波の重ね合わせで表現できない**.

拡張しよう

課題：正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい







信号を別の関数の重ね合わせで表現したい．

その関数は，

✓<u>exp(-jωt)の自然な拡張でありたい</u>

✓<u>微積分に対する不変性は保ちたい</u>

新たな基底関数として，**exp(-st)**を考える．

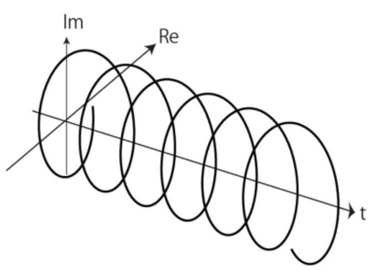
ただしsはもはや虚数jωではなく，複素数．

exp(-st)

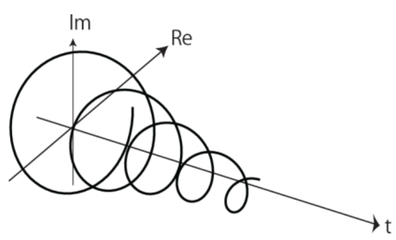
実質的には2変数の関数

$$\exp(-st) = \exp(-(c+j\omega)t)$$
$$= \underbrace{\exp(-ct)}_{\text{増大or減衰成分}} \times \underbrace{\exp(-j\omega t)}_{\text{回転成分}}$$

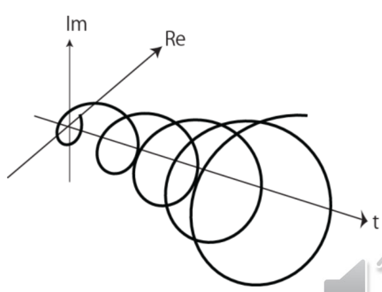
●c=0



●c＞0



●c＜0



微積分に対するexp(st)の不変性

exp(jωt)の場合と同様，exp(st)も微分，積分しても関数の形は不変.

$$\frac{d}{dt}\exp(st) = s\exp(st) \qquad \int \exp(st)dt = \frac{1}{s}\exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\exp(st) = s^n\exp(st) \qquad \underbrace{\int\int\int}_{n} \exp(st)dt = \frac{1}{s^n}\exp(st)$$

微分⇒　sをかける操作
積分⇒　sで割る操作

ラプラス(Laplace)変換：フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

ラプラス変換

$$L(f(t)) = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

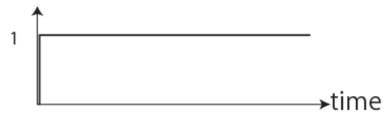
＜ラプラス変換のフーリエ変換による解釈＞

- 純虚数jω⇒複素数s=c+jωに拡張
- 元の関数f(t)にexp(-ct)をかけることで発散を抑えた関数をフーリエ変換している、と解釈できる
- 逆にexp(-ct)によってt<0の領域で発散してしまうので、そこはf(t)=0とする。無限の過去を扱う必要はないため問題なし

ラプラス変換の例：ステップ関数

ステップ関数
(階段関数）

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

$$=$$

$$=$$

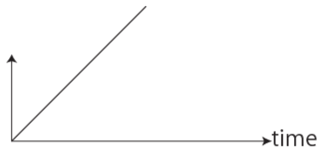
$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：ランプ関数

ランプ関数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：sin，cos

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty} \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲内(Re(s)＞０)

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t) = \exp(at)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s-a)>0

ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^\infty \dot{f}(t)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

ただしf(t)はt<0で0
また，ラプラス変換の積分範囲は0からではなく，0+から

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$ のラプラス変換は？

$$L(\int_{t=0}^{t} f(t)dt) = \int_0^\infty \left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

（ルール）ラプラス変換では，積分は1/sをかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$$

ルールより，cos(ωt)のラプラス変換を求めるには，
sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ，ωで割ればよい(sin(0)=0より)

. . . 確かにそうなっている

sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$$

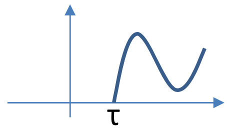
ルールより，sin(ωt)のラプラス変換を求めるには，
cos(ωt)のラプラス変換にsをかけ，f(0)を引き、-ωで割けば良い

. . . 確かにそうなっている

ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$f(t-\tau)$ のラプラス変換は？

ただしτ≧0（時間遅れ）とし、t<τの範囲ではf(t)=0とする。



$$L(f(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)\exp(-st)dt$$

$=$ 　　t’=t-τ

$=$ 　　t<τの範囲でf(t)=0より
t’=t-τ<0の範囲でf(t’)=0

$=$

教科書によってはu(t-τ)f(t-τ) (uはステップ関数）

（ルール）
ラプラス変換では，τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当
ただしt<τの範囲でf(t)=0という前提。

ラプラス変換表

1	➡	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	➡	$\frac{1}{s-a}$
t	➡	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	➡	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	➡	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	➡	$sF(s)-f(0)$
$\sin(\omega t)$	➡	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$	➡	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	➡	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$f(t-\tau)$	➡	$\exp(-s\tau)F(s)$

通常ラプラス逆変換は，表を見て行う

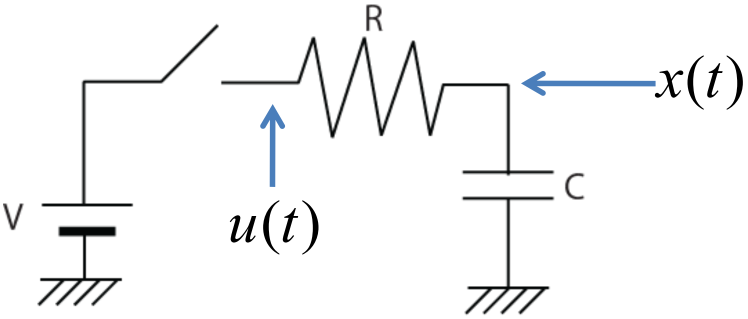
ラプラス変換の応用：微分方程式

$$\dot{f}(t) \Rightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\int_{t=0}^{t} f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{s}F(s)$$

- 微積分はラプラス変換によってsに関する多項式に変換される。
- このため、微分方程式はラプラス変換によって多項式の解を求める問題に変換できる。

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(1)

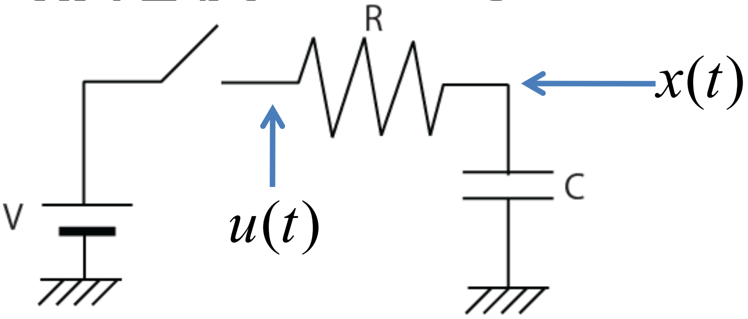


●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力：コンデンサの電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(2)



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int I dt$$

$$x = \frac{1}{C}\int I dt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX，
●uのラプラス変換をUとすると，

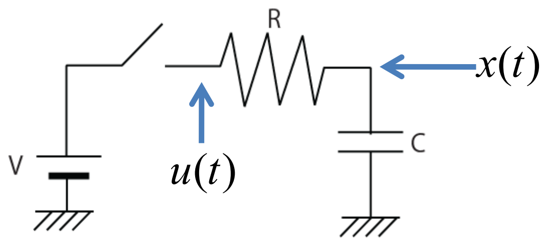
$$U =$$

（∴（ルール）微分⇒sをかける）

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(3)



$$X = \frac{1}{sRC + 1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

$$U(s) =$$

$$X =$$

$$=$$

$$=$$

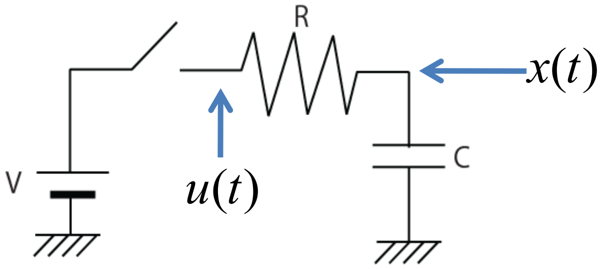
部分分数展開

$$a = RC$$

$$b = -RC$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(4)

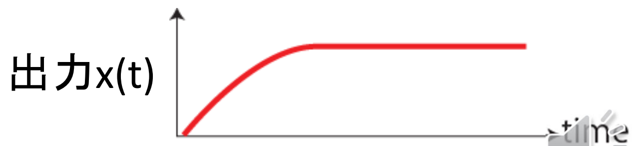


$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

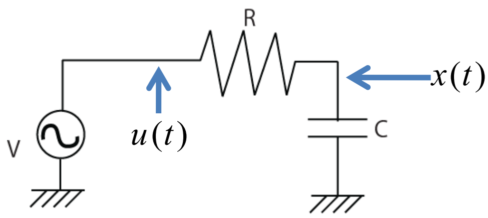
ラプラス変換表を見て逆変換する

$$x(t) =$$

定常成分　　過渡成分



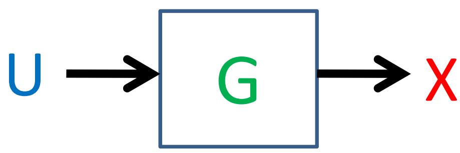
伝達関数



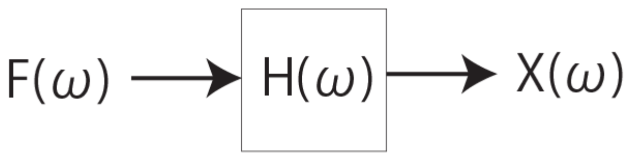
フーリエ変換の時と同様に，
入出力関係を決める「システムの特性」を知りたい

●先程の例では
xのラプラス変換を**X**，uのラプラス変換を**U**としたとき，

$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}}U$$

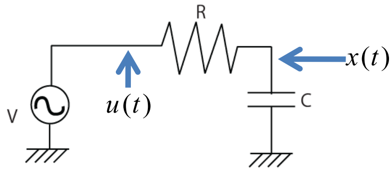


この部分が入出力関係を決めている．**伝達関数G**.
<u>s=jωを代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ.</u>



伝達関数

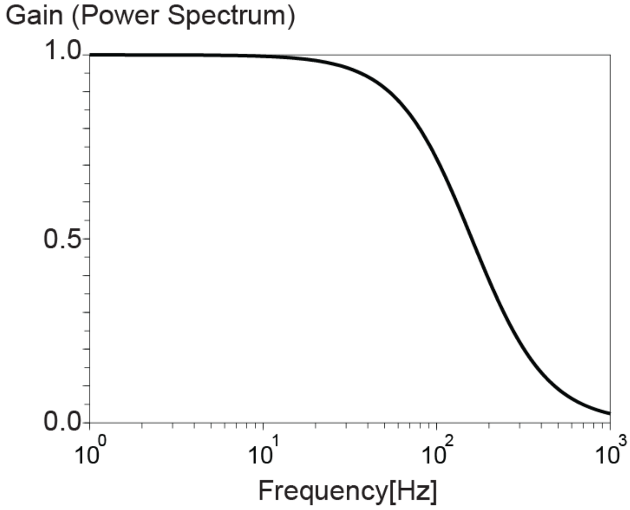
$$H(\omega)=\frac{1}{sRC+1}=\frac{1}{RC}\frac{1}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$



s=jωを代入して，周波数応答を見てみる

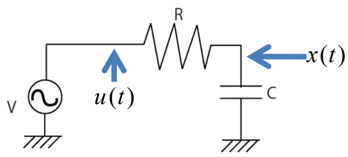
Scilabソース

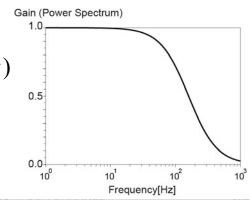
```
R=1000;             //抵抗 1kΩ
C=10^(-6);          //コンデンサ1μF
f=[1:1000];         //周波数
w=2 * %pi * f;      //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d(f,power_spec,logscale="ln");
```

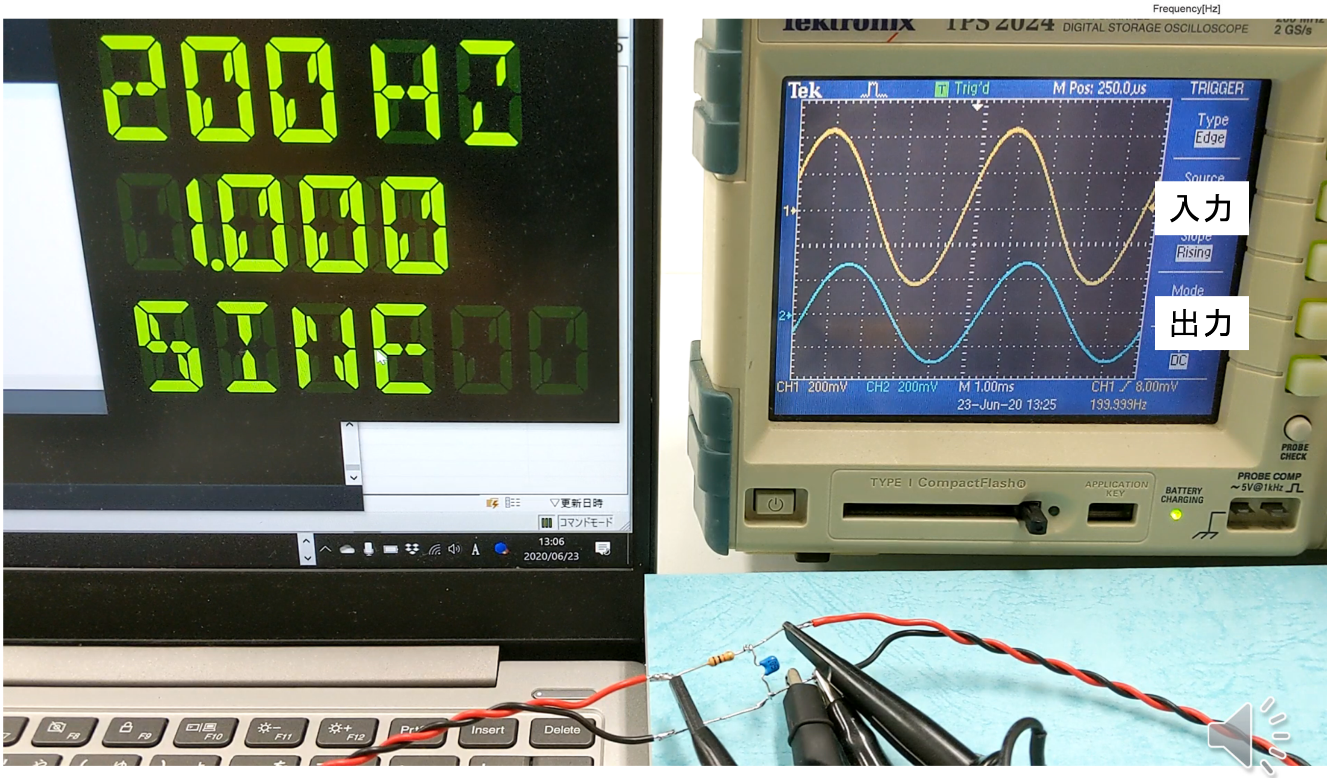


1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで，
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出来た．

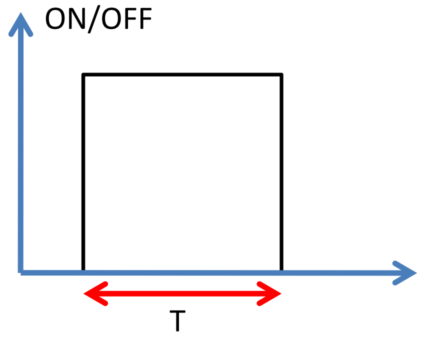
ローパスフィルタ実験







時間幅Tのパルスを与えると？



$$u(t)=\begin{cases} V & 0\le t\le T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

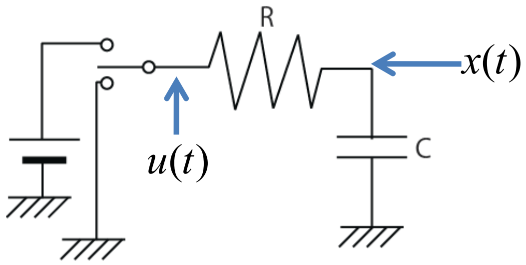
この入力のラプラス変換は、

$U(s)=$

$=$

$=$

$=$



出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて

$X=$

時間幅Tのパルスを与えると？

$$X=\frac{1}{sRC+1}\frac{1-e^{-sT}}{s}V$$

$=$

$=$

これは、

$$\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)V \text{ と、} \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)e^{-sT}V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように

後者の逆ラプラス変換は、exp(-sT)が掛かっている。これはラプラス変換表により、**Tの時間遅れ**を意味するので、

ただしこれはt≧Tでのみ適用される（t<Tでは0。時間遅れのラプラス変換の解説参照）

時間幅Tのパルスを与えると？

結局、応答は、t<Tでは、

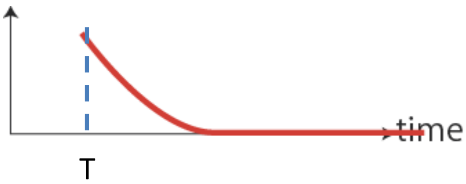
$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

これは最初に求めたステップ応答。
t≧Tでは、

=

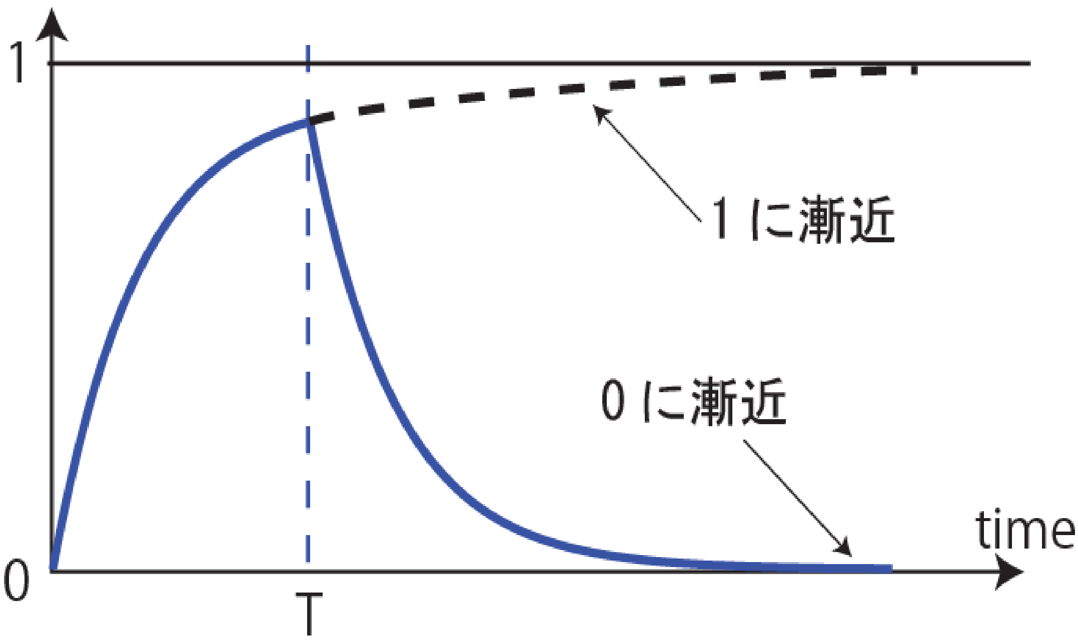
=

定数　減衰項



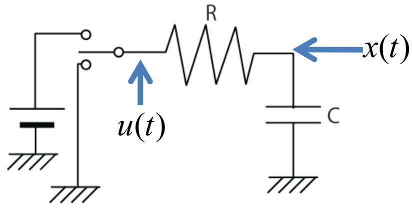
これは放電による減衰を意味する
t=Tでは2式は一致する

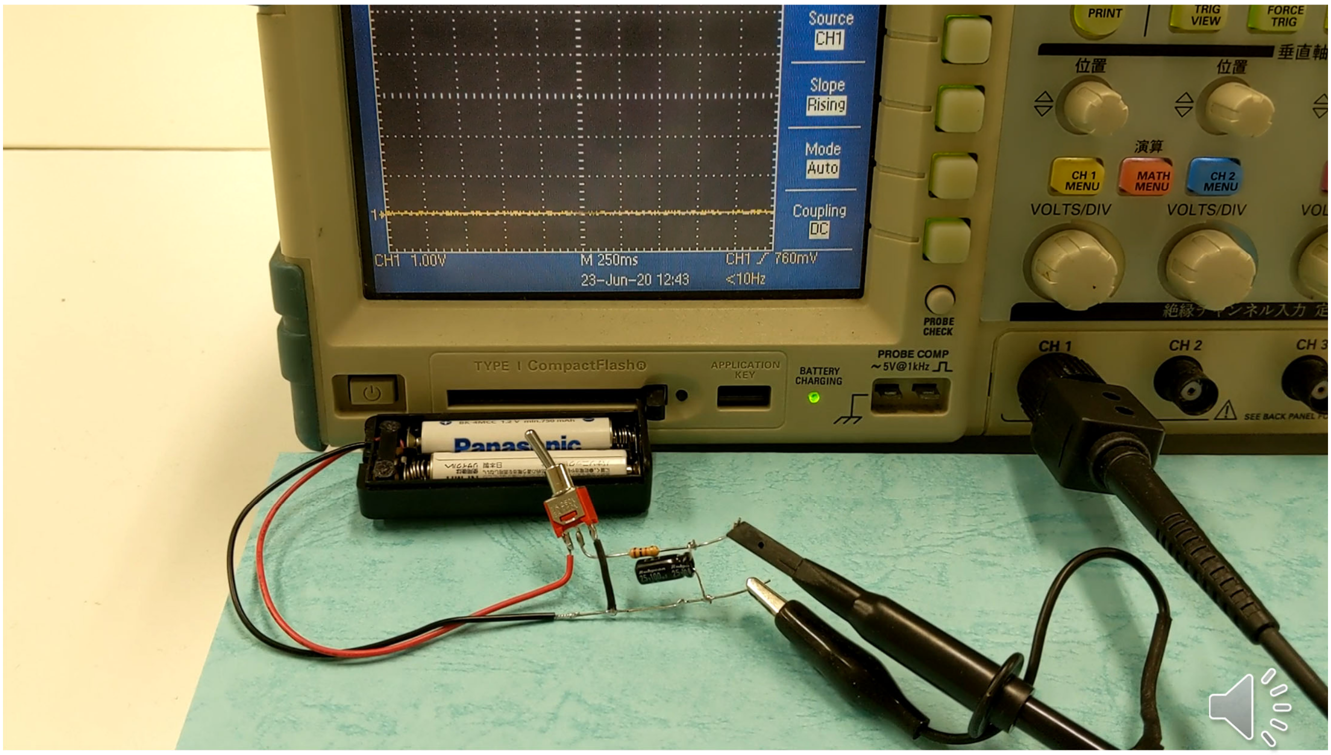
時間幅Tのパルスを与えると？まとめ



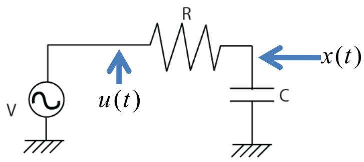
$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \qquad V(1-e^{-\frac{1}{RC}T})e^{-\frac{1}{RC}(t-T)}$$

ローパスフィルタ実験





伝達関数まとめ



$$F(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow X(\omega) \qquad U \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow X$$

（1）システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

●先程の例では、xのラプラス変換をX，uのラプラス変換をUとしたとき，

$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}} U$$

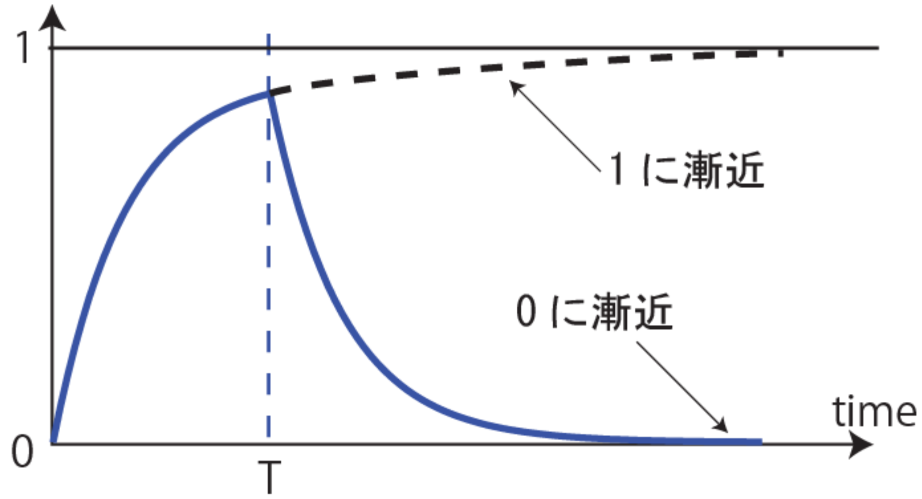
この部分

（2）入力のラプラス変換Uを求める

（3）X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。

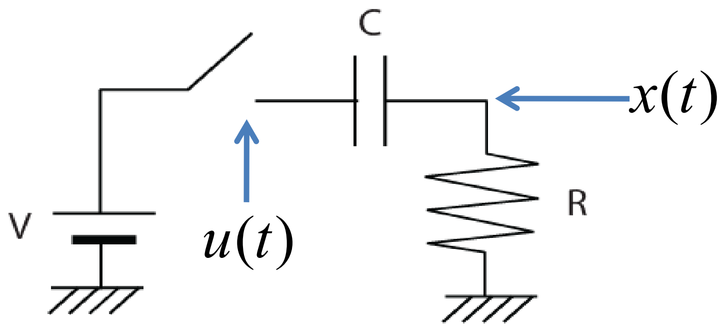
（4）逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。

レポート課題(1)



R=1kΩ、C=1μF、T=1ms、V=1として、時刻0〜10msの間の電圧の変化をプロット、観察せよ。

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(1)

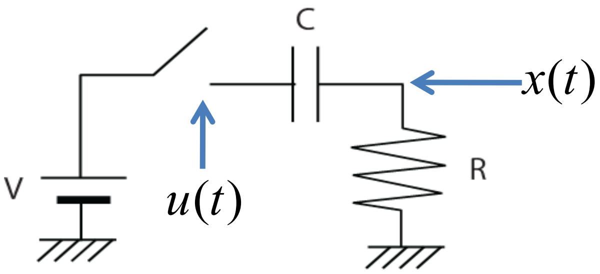


●入力：コンデンサの左側の電圧 u(t).

●出力：抵抗の電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(2)



●電流Iを考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C}\int I dt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C}\int \frac{x}{R} dt$$

●xのラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると,

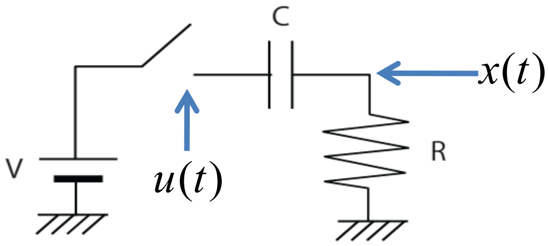
$$U =$$

(∵(ルール)積分⇒sで割る)

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(3)



$$X = \frac{sCR}{sCR+1}U$$

これで**伝達関数**がもとまった
t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

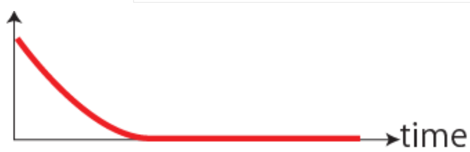
$$U(s) =$$

$$X =$$

$$=$$

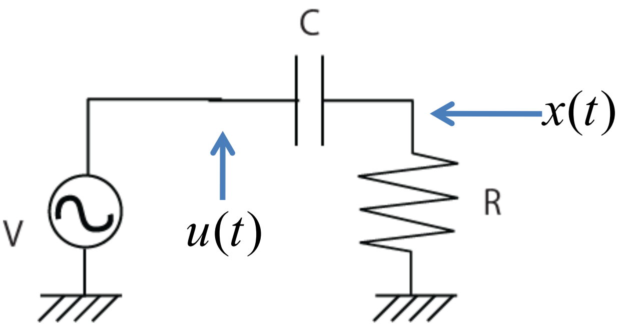
ラプラス変換の表を使って逆変換する

$$x(t) =$$



一瞬だけ電流が流れることがわかる

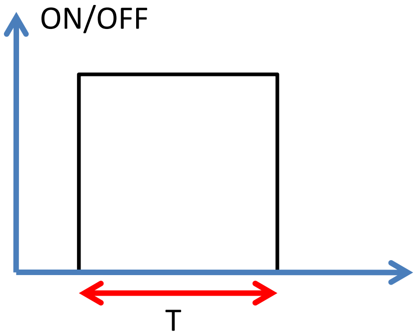
レポート課題(2):ハイパスフィルタの伝達関数



ローパスの場合を参考に，上記回路の伝達関数を求め，
R=32Ω，C=100μFの場合の周波数応答を表示するコードを書け.

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか，
観察の結果をコード中にコメントすること.

時間幅Tのパルスを与えると？

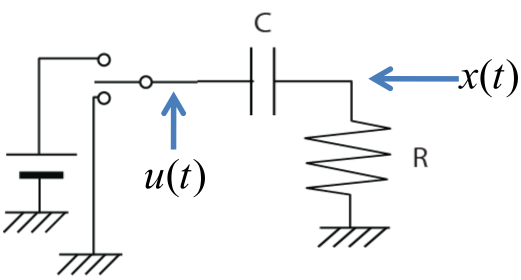


$$u(t)=\begin{cases} V & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

この入力のラプラス変換は、

$$U(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} V$$

出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて



$$X =$$

時間幅Tのパルスを与えると？

$$X=\frac{sCR}{sCR+1}\frac{1-e^{-sT}}{s}V$$

$$=$$

これは、

$$\left(\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)V \quad と、\left(\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)e^{-sT}V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように

$$x(t)=$$

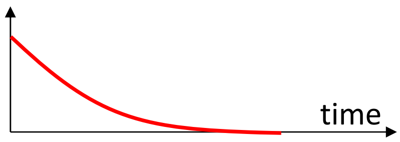
後者の逆ラプラス変換は、exp(-sT)が掛かっている。これはラプラス変換表により、**Tの時間遅れ**を意味するので、

$$x(t)=$$

ただしこれはt≧Tでのみ適用される(t<Tでは0。時間遅れのラプラス変換の解説参照)

時間幅Tのパルスを与えると？

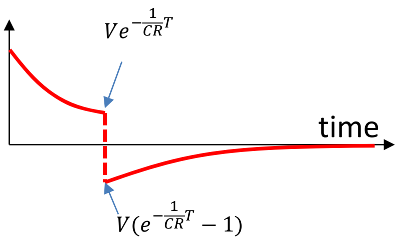
結局、応答は、t<Tでは、



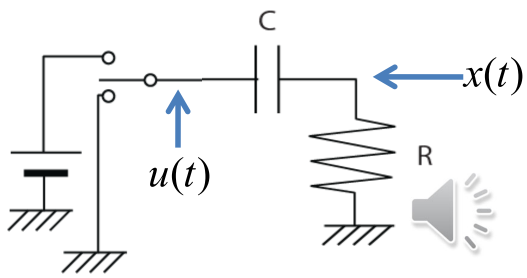
これは最初に求めたステップ応答。

t≧Tでは、

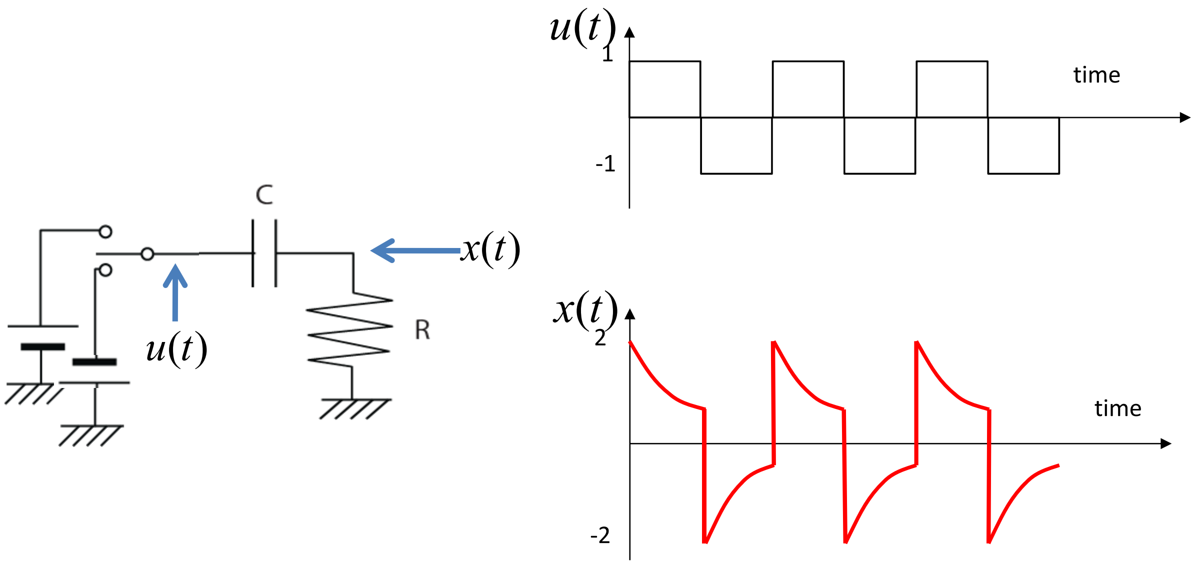
$$=$$



スイッチを切り替えた瞬間に極性が反転し、コンデンサに充電された電圧が現れる。その後自由放電。

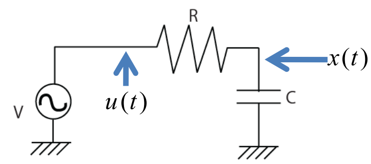


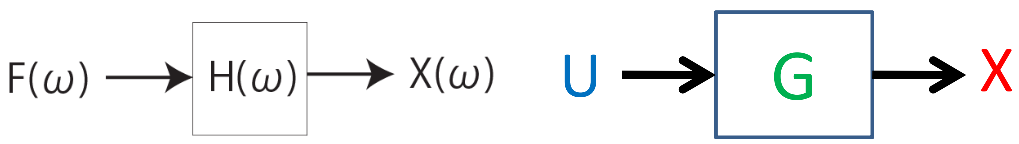
(参考)CRハイパスフィルタへの正負矩形波入力



Peak to peak 電圧は約2倍になる。

今日の話まとめ





フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う

システムの応答は次のようなステップで求めることが出来る

(1)システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

(2)入力のラプラス変換Uを求める

(3)X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。

(4)逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。