

インタラクティブシステム論 第7回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

- 4/11 インTRODクシヨン
- 4/18 フーリエ変換
- 4/25 フーリエ変換と線形システム
- 5/9 信号処理の基礎
- 5/16 (出張予定)
- 5/23 信号処理応用1(相関)
- 5/30 信号処理応用2(画像処理)
- 6/6 (出張予定) 中間確認テスト
- 6/13 ラプラス変換
- 6/20 古典制御の基礎
- 6/27 行列
- 7/4 行列と最小二乗法
- 7/11 (出張予定) インタラクティブシステムの実際(小泉先生)
- 7/18 ロボティクス
- 7/25 (出張予定) 期末確認テスト

(復習: フーリエ級数展開)
歪みを周波数で分解して説明できる

●入力: $f(t)$ ●出力: $x(t)$

- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解する
- (2) 周波数ごとの出力の振幅と位相を求める。
- (3) 合計すると出力が得られる。

これを連続関数で考えるとどうなるか？

(復習: フーリエ変換)
入出力の関係: 関数同士の掛け算

●入力: $f(t)$ ●出力: $x(t)$

- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解 $\Rightarrow F(\omega)$
- (2) 周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか: $H(\omega)$
- (3) 出力 (のフーリエ変換): $X(\omega) = H(\omega) * F(\omega)$
- (4) 逆フーリエ変換すると出力が得られる: $x(t)$

(復習) 伝達関数

●入力: $f(t)$ ●出力: $x(t)$

フーリエ空間では、入出力は単なる掛け算で表される。

$$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$$

この入出力関係を定義するシステムの性質 $H(\omega)$ を伝達関数と呼ぶ。

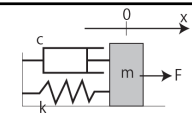
(復習) 伝達関数 $H(\omega)$ を求めるには？

$$F(\omega) \longrightarrow H(\omega) \longrightarrow X(\omega)$$

$H(\omega)$ は、周波数 ω の信号を入力したときの出力の振幅と位相を表す。だから...

1. ある周波数 ω の正弦波を入力。
2. 出力の振幅と位相を測定。
 - 入出力間の振幅の比率 $\text{amp} = |H(\omega)|$
 - 入出力間の位相差 $\text{phase} = \angle H(\omega)$
3. この周波数での伝達関数は
 - $H(\omega) = \text{amp} \times \exp(j * \text{phase})$.
4. 周波数を変えて測定すれば、 $H(\omega)$ が得られる。

(復習)式の上で「計測」



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$f = \exp(j\omega t)$ ●ある周波数 $2\pi f = \omega$ の正弦波を **入力**
 $x(t) = H(\omega) \exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる **出力** が得られる

この $x(t)$ の微分は? 同様に2階微分は

$$\dot{x}(t) = j\omega H(\omega) \exp(j\omega t) \quad \dot{\dot{x}}(t) = (j\omega)^2 H(\omega) \exp(j\omega t)$$

$$= j\omega x(t) = s x(t) \quad = s^2 x(t)$$

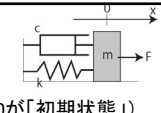
$j\omega$ と書くのがわずらわしいので s と書く
(本当はもっと意味があるが、とりあえず)

元の式に代入 $(ms^2 + cs + k)H(\omega) \exp(j\omega t) = \exp(j\omega t)$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad s = j\omega \text{ を代入すれば、}$$

システムの伝達関数に他ならない。

しかし実際は...



- 時刻 $t \geq 0$ だけ考えればよい場合がほとんど ($t=0$ が「初期状態」)
- 入力 $f(t)$ がフーリエ変換出来ない状況が **普通** に存在する

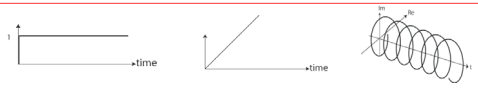
$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} 1 \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \exp(-j\omega t) \\ -j\omega \end{bmatrix}_0^{\infty} dt = \frac{1 - \exp(-j\omega \infty)}{j\omega} \quad ??$$

無限遠で収束しない関数は積分をうまく処理できない(一部は δ 関数の導入で扱える)
要は、**正弦波の重ね合わせで表現できない**。

拡張しよう

課題: 正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい。

その関数は、

- ✓ $\exp(-j\omega t)$ の自然な拡張でありたい
- ✓ 微積分に対する不変性は保ちたい

↓

新たな基底関数として、 **$\exp(-st)$** を考える。
ただし s はもはや虚数 $j\omega$ ではなく、複素数。

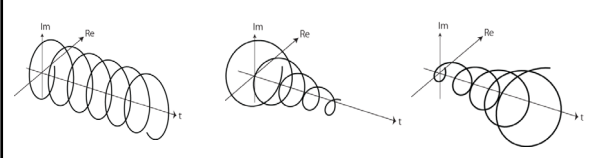
$\exp(-st)$

実質的には2変数の関数

$$\exp(-st) = \exp(-(c+j\omega)t) = \exp(-ct) \times \exp(-j\omega t)$$

増大or減衰成分 回転成分

- $c=0$
- $c>0$
- $c<0$



微積分に対する $\exp(st)$ の不変性

$\exp(j\omega t)$ の場合と同様、 $\exp(st)$ も微分、積分しても関数の形は不変。

$$\frac{d}{dt} \exp(st) = s \exp(st) \quad \int \exp(st) dt = \frac{1}{s} \exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \exp(st) = s^n \exp(st) \quad \iint \exp(st) dt = \frac{1}{s^n} \exp(st)$$

微分 \Rightarrow s をかける操作
積分 \Rightarrow s で割る操作

ラプラス(Laplace)変換: フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$


ラプラス変換

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

<ちがいが>

- 純虚数 $j\omega \Rightarrow$ 複素数 s に拡張
- 積分範囲は無限の過去を扱う必要がないため 0 から。

ラプラス変換の例:ステップ関数

ステップ関数 (階段関数) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$ 

フーリエ変換では扱えなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Blank lines for derivation:


$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$

ラプラス変換の例:ランプ関数

ランプ関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$ 

フーリエ変換では扱えなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Blank lines for derivation:

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$

ラプラス変換の例: sin, cos

$f(t) = \sin(\omega t)$ $f(t) = \cos(\omega t)$

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

$= \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt$ $= \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt$

Blank lines for derivation:

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲内 ($\text{Re}(s) > 0$)

ラプラス変換の例: exp関数

$f(t) = \exp(at)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Blank lines for derivation:

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s-a) > 0$

ラプラス変換の例: 微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\dot{f}(t)$ のラプラス変換は?

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \exp(-st) dt$$

Blank lines for derivation:

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただし $f(t)$ は $t < 0$ で 0
また、ラプラス変換の積分範囲は 0 からではなく、0+ から

(ルール) ラプラス変換では、微分は s をかけて $f(0)$ を引く

ラプラス変換の例: 積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\int_{t=0}^t f(t) dt$ のラプラス変換は?

$$L\left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) = \int_0^{\infty} \left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) \exp(-st) dt$$

Blank lines for derivation:

$$=$$

$$=$$

$$=$$

(ルール) ラプラス変換では、積分は $1/s$ をかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$$

ルールより、cos(ωt)のラプラス変換を求めるには、sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ、ωで割ればよい(sin(0)=0より)

... 確かにそうになっている

sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$$

ルールより、sin(ωt)のラプラス変換を求めるには、cos(ωt)のラプラス変換にsをかけ、f(0)を引き、-ωで割ればよい

... 確かにそうになっている

ラプラス変換の例: 時間遅れ

f(t) のラプラス変換が分かっているとき、f(t - τ) のラプラス変換は?

$$L(f(t - \tau)) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) \exp(-st) dt$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただしf(t)はt<0で0であることを利用した。

(ルール)
ラプラス変換では、τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当

ラプラス変換表

$$1 \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$t \longrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \longrightarrow \left(\frac{1}{s-a}\right)^2$$

$$t^n \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f'(t) \longrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

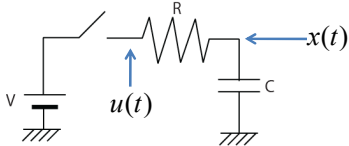
$$\int_{-0}^t f(t) dt \longrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t - \tau) \longrightarrow \exp(-s \tau) F(s)$$

通常ラプラス逆変換は、表を見て行う

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(1)

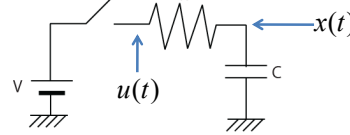


●入力: 抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力: コンデンサの電圧x(t).

(問題)スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(2)



●電流Iを考えて、

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = \frac{1}{C} \int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX,

●uのラプラス変換をUとすると、

$$U =$$

(∴(ルール)微分⇒sをかける)

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を試みる:ローパス(3)

$X = \frac{1}{sRC + 1} U$

$t=0$ でスイッチを入れるから
 $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$

$U(s) =$

$X =$

部分分数展開
 $a = RC$
 $b = -RC$

ラプラス変換を試みる:ローパス(4)

$X = V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$

入力 $u(t)$

ラプラス変換表を見て逆変換する

$x(t) =$

出力 $x(t)$

定常成分 過渡成分

伝達関数

フーリエ変換の時と同様に、入出力関係を定める「システム」を知りたい

- 先程の例では
 x のラプラス変換を X 、 u のラプラス変換を U としたとき、

$X = \frac{1}{sRC + 1} U$

$U \rightarrow \boxed{G} \rightarrow X$

この部分が入出力関係を決めている。伝達関数 G 。
 $s=j\omega$ を代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ。

$F(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow X(\omega)$

伝達関数

$H(\omega) = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$

$s=j\omega$ を代入して、周波数応答を見てみる

```

Scilabソース
R=1000; //抵抗 1kΩ
C=10^-6; //コンデンサ1μF
f=[1:1000]; //周波数
w=2 * %pi * f; //角周波数
    
```

```

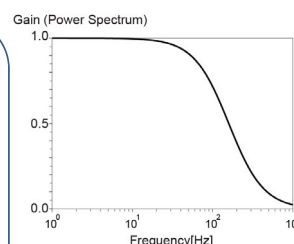
//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));
    
```

```

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);
    
```

```

//片対数グラフで表示
plot2d(f,power_spec,logscale="ln");
    
```



1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで、1kHz程度以上の周波数を阻止するローパスフィルタが出来た。

時間幅Tのパルスを与える?

$u(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$

この入力のラプラス変換は、
 $U(s) =$

出力のラプラス変換は、システムの伝達関数をかけて
 $X =$

時間幅Tのパルスを与える?

$X = \frac{1}{sRC + 1} \frac{1 - e^{-sT}}{s} V$

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように
 $V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

後者の逆ラプラス変換は、 $\exp(-sT)$ が掛かっている。これはラプラス変換表により、**Tの時間遅れ**を意味するので、
 ただし、 $t \geq T$

これは、
 $\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \right) V$ と、 $\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \right) e^{-sT} V$
 の組み合わせ

時間幅Tのパルスを与える?

結局、応答は、 $t < T$ では、

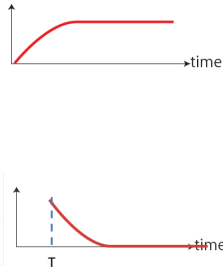
$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

これは元々求めたものと同じ。

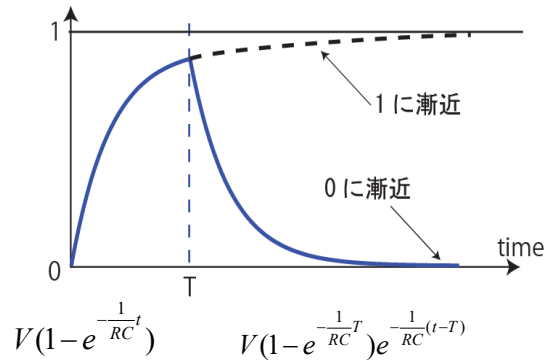
$t \geq T$ では、

$$= \text{定数} - \text{減衰項}$$

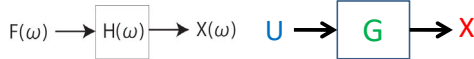
これは放電による減衰を意味する
 $t = T$ では2式は一致する



時間幅Tのパルスを与える? まとめ



伝達関数まとめ



(1) システムの入出力関係を定める伝達関数Gをもとめる

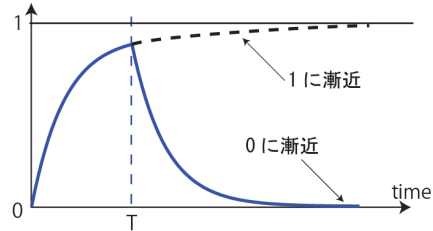
- 先程の例では、xのラプラス変換をX、uのラプラス変換をUとしたとき、

$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

この部分

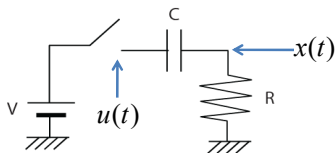
- (2) 入力のラプラス変換Uを求める
- (3) $X = GU$ によって出力のラプラス変換Xが得られる。
- (4) 逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。

レポート課題(1)



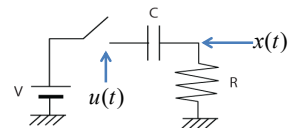
R=1kΩ、C=1μF、T=1ms、V=1として、時刻0~10msの間の電圧の変化をプロット、観察せよ。

ラプラス変換を使ってみる: ハイパス(1)



- 入力: コンデンサの左側の電圧 $u(t)$.
 - 出力: 抵抗の電圧 $x(t)$.
- (問題) スイッチを入れた後の $x(t)$ の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる: ハイパス(2)



- 電流Iを考えて、
- xのラプラス変換をX、
- uのラプラス変換をUとすると、

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C} \int \frac{x}{R} dt$$

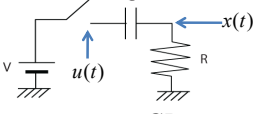
$$U =$$

(∴(ルール)積分⇒sで割る)

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる:ハイパス(3)




$$X = \frac{sCR}{sCR + 1} U$$

ラプラス変換の表を使って逆変換する

これで**伝達関数**がもたらした
t=0でスイッチを入れるから

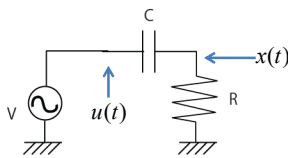

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

$$U(s) =$$

$$x(t) =$$


一瞬だけ電流が流れることがわかる

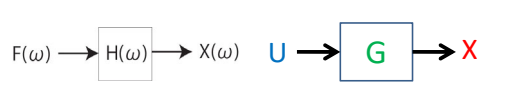
レポート課題(2):ハイパスフィルタの伝達関数

ローパスの場合を参考に、上記回路の伝達関数を求め、
R=32Ω, C=100µFの場合の周波数応答を表示するコードを書け。

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか、
観察の結果をコード中にコメントすること。

今日の話まとめ



フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う
システムの応答は次のようなステップで求めることができる

- (1) システムの入出力関係を定める**伝達関数G**をもとめる
- (2) **入力のラプラス変換U**を求める
- (3) X=GUによって**出力のラプラス変換X**が得られる。
- (4) 逆ラプラス変換によって**出力波形**が得られる。