インタラクティブシステム論
第9回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

行列

行列．．．1，2年でやったはず

今日の内容

●固有値とは，固有ベクトルとは
●行列の対角化：なにをしたことになるか，なぜうれしいのか
●情報理論・制御における行列の応用事例

キーワードは，
固有値，固有ベクトル，対角化

行列：データ列を変換するもの

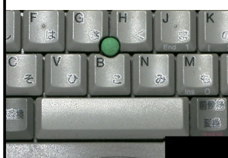
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

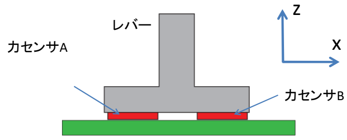
（例1）
y:観測データ，A：システムの性質，x：媒介変数

（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A：フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（例）2軸力センサ



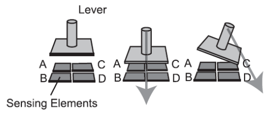
（例）2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（例）多軸力センサ

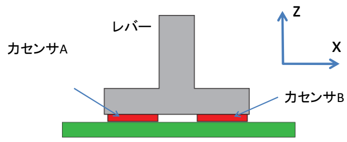


$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

一般には正方行列ではない！！
（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

力センサのキャリブレーション（較正）

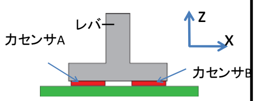


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

逆行列



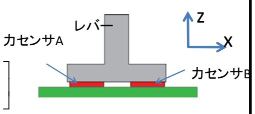
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} g_1 \\ g_3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{f_{z1}} & \boxed{f_{z2}} \\ f_{x1} & f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{m_1} & \boxed{m_2} \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

2回目の入力　2回目の出力

$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

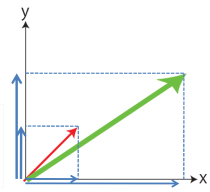
1. 2回**既知の**力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**,
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列$\mathbf{F}^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ「較正行列」A**

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{v} = \mathbf{Au} \qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の時，

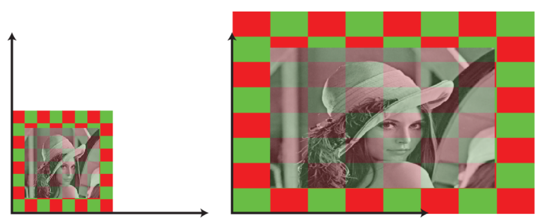
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} =$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ は，x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

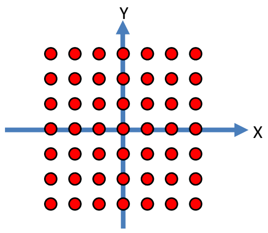
では，

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ の時は？．．．．よく分からない．

試してみる

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ で，平面上の点群はどう移動するか

X=-3～3，Y=-3～3の点群で検証

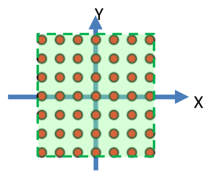


Scilabコード

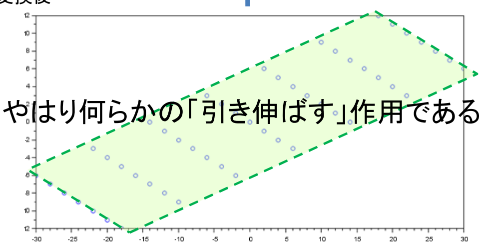
```
A=[8,-2;3,1];
s=[];
t=[];
for x=-3:3
   for y=-3:3
         r=A*[x;y];
         s=[s,r(1)]; //x座標格納
         t=[t,r(2)]; //y座標格納
   end
end
plot(s,t,'o');
```

試してみる

変換前



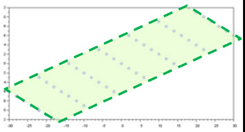
変換後



やはり何らかの「引き伸ばす」作用である

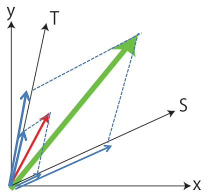
ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$ の作用は



●謎のS軸成分をs倍，
●謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことである

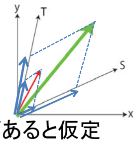
ただしもはや，
このS,T軸は直交していない．



固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

固有ベクトル，固有値とは，
謎のS，T軸，およびs,t倍
のことである．



（求める手続き）
(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}=\lambda\mathbf{Iu}$$
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)u_x+bu_y=0 \Longrightarrow u_y=-(a-\lambda)u_x/b$$
$$cu_x+(d-\lambda)u_y=0$$

$$cu_x-(d-\lambda)(a-\lambda)u_x/b=0$$
$$\left((a-\lambda)(d-\lambda)-bc\right)u_x=0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

この解λ1，λ2を固有値と呼び，
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ．

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$\lambda_1=2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-2 & -2\\ 3 & 1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

大きさを1とすれば，$k=1/\sqrt{10}$

$\lambda_2=7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-7 & -2\\ 3 & 1-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

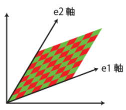
大きさを1とすれば，$k=1/\sqrt{5}$

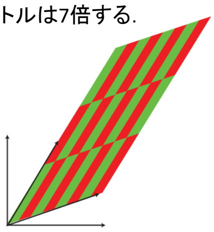
作用：e1軸上のベクトルは2倍，
e2軸上のベクトルは7倍する．

固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
e2軸上のベクトルは7倍する．



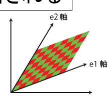


•やはり引き延ばす作用である
•固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

行列と座標変換

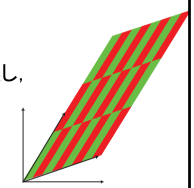
•引き延ばす作用である
•固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

わかりにくい．．．



行列の作用を，

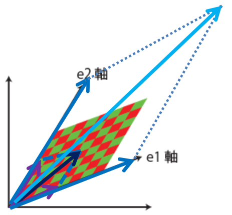
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



ように分解すればわかりやすいはず？？

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す



(3)合成して元に戻す操作，から考える

行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

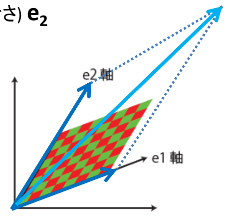
この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない

(e_1成分の大きさ) $\mathbf{e_1}$ +(e_2成分の大きさ) $\mathbf{e_2}$

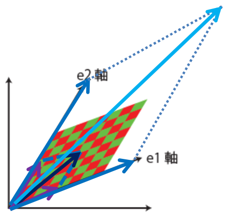
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$ とおいて

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$



行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

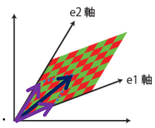


(1)引き延ばし軸での成分表示

行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

(3)「合成」が,

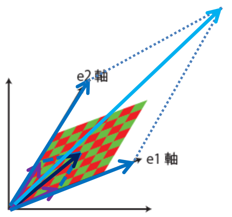
$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$



で出来るのだから，(1)はその逆のはず.
すなわち

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x\text{軸成分} \\ y\text{軸成分} \end{bmatrix}$$ により**引き延ばし軸での成分表示**ができる

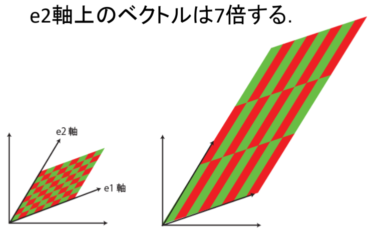
行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す



固有ベクトルと固有値(再)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.



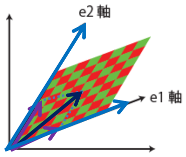
- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルが，固有値倍される

（2）引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

各成分を
固有ベクトル$\mathbf{e}_1$軸に沿って固有値λ_1倍，
固有ベクトル$\mathbf{e}_2$軸に沿って固有値λ_2倍する．

この操作は，

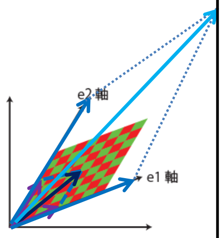


$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$



固有値を対角成分に並べた行列を**T**と置く． $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax} =$$

行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。
まず、2つの固有値をλ1、λ2、固有ベクトルをe1,e2とする。

2つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

[e1,e2]をP、固有値を対角成分に持つ行列をTと書き、左辺のPを右辺に移項すると

（こちらのほうが簡単！
この式が持つ意味は前述のとおり）

レポート課題（1）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

の作用について，xy平面上の点群（X=-3～3，Y=-3～3）がどのように移動するか，例と同様に試してみること

またこの移動が，固有ベクトル，固有値の観点から妥当であることを確認すること

重要な応用：$\mathbf{A}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n\mathbf{x} &= \left(\mathbf{PTP}^{-1}\right)^n\mathbf{x} \\ &= \mathbf{PT}\underline{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}\mathbf{T}\underline{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}\mathbf{TP}^{-1}\cdots\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{PT}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\because \mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{bmatrix}}$$

行列のn乗を簡単に計算することができる

重要な結論：nが非常に大きくなった時の$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

行列の固有値λの絶対値が引き延ばしの倍率だから，

固有値が
- 一つでも1より大きければ，A^nは**発散**する
- 全て1より小さければ，A^nは0に収束する

例：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 7$ を代入して，

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{P}\mathbf{T}^3\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 7^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（3）

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の時は？．．．．回転と習ったはず

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる．

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) + \sin^2\theta = 0$$

回転行列の固有値＝exp(jθ)

$$(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) + \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \frac{2\cos\theta \pm j\sqrt{4\sin^2\theta}}{2} = \cos\theta \pm j\sin\theta = \exp(\pm j\theta)$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos\theta + j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \cos\theta - j\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \cos\theta - j\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$= \sin\theta\begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore u_x = ju_y$ $\mathbf{e}_1 = k\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

$\cos\theta - j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$\mathbf{e}_2 = k\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

（参考）回転行列も（拡張された）引き延ばしである

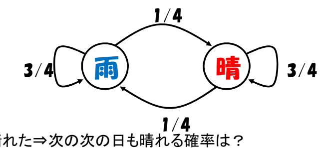
•一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数．

•x,y軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる．

•複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す．

情報理論における行列の例

•ある日晴れた：次の日も晴れる確率は3/4，雨になる確率は1/4
•ある日雨：次の日も雨の確率は3/4，晴れる確率は1/4
これは「状態遷移図」によって表せる．（マルコフ過程と呼ぶ）

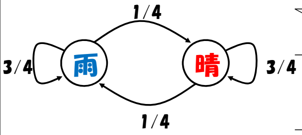


•ある日晴れた⇒次の次の日も晴れる確率は？

（回答）
次の日晴れて，次の次の日晴れる
次の日雨になって，次の次の日晴れる
合わせて，

では，次の次の次の日だと？100日後だと？

情報理論における行列の例



X_t \ X_{t-1}	晴	雨
晴	3/4	1/4
雨	1/4	3/4

状態遷移図を行列で表すことで，ある日の天気の確率分布(X_{t-1})から次の日の天気の確立分布(X_t)を得ることができる.

次の日の天気の確率分布ベクトル　遷移確率行列　ある日の天気の確率分布ベクトル

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

情報理論における行列の例

ある日晴れた：確率分布ベクトルは[1, 0] なので，次の日は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

その次の日は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

一般にN日後は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

100日後は？無限日後は？

A^Nを求める.

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\left\|\begin{bmatrix} 3/4-\lambda & 1/4 \\ 1/4 & 3/4-\lambda \end{bmatrix}\right\| = 0$$

A^Nを求める.

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$=$

$=$

これによって，n日後の晴れと雨の確率分布をもとめられる

無限日後に起きること

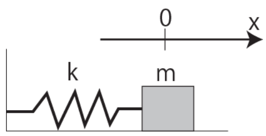
$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1/2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$ より

初日の，晴れの確率と雨の確率の合計値は明らかに1だから，

つまり，この遷移行列に従う場合，
初日の天気に関わらず無限日後は晴れと雨の確率は等しくなる.

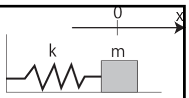
制御における行列

おもりの挙動をシミュレートしたい




```
m=1.0;  //重さ
k=1.0;  //ばね定数
x=1.0;  //初期位置
v=0;    //初期速度
dt=0.1; //時間刻み
record=[];//記録用
for time= 0:dt:10        //時刻
    F=-k*x;              //ばねによって生じる力
    a=F/m;               //生じる加速度
    v= v+a*dt;           //速度
    x= x+v*dt;           //位置
    record = [record,x]; //記録(※テクニック：ベクトルが伸びていく)
end
plot([0:dt:10],record);
```

制御における行列



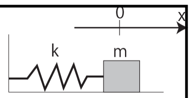

```
for time= 0:dt:10          //時刻
      F=-k*x;              //ばねによって生じる力
      a=F/m;               //生じる加速度
      v= v+a*dt;           //速度
      x= x+v*dt;           //位置
end
```

位置，速度，加速度を並べた「状態ベクトル」**x**を定義 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から，dt時間後の新たな位置，速度，加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

制御における行列



Scilabコード

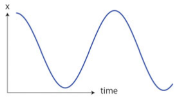
```
m=1.0;    //重さ
k=1.0;    //ばね定数
x=1.0;    //初期位置
v=0;      //初期速度
a=-k/m*x; //初期加速度
dt=0.01;  //時間刻み
record=[];//記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10  //時刻
  state= A*state;
  record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
```

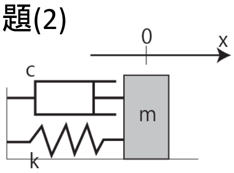


$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}_{n-1} = \cdots = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

•行列Aのn乗を使えば，
n時刻先の状態をシミュレート可能

•行列Aの固有値を見れば，
システムが将来(n=∞）収束するか
発散するか予測可能！

レポート課題(2)



●ダンパを加えた際の行列を考え，
同様のシミレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと，
すなわち位置が収束することを確認し，コメントに記せ
（Scilabでは固有値はspec()で求められる）

注意：ここで導入した行列はあくまで導入編用で，
シミュレーションとしては不正確です．