インタラクティブシステム論 第9回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	4/10	イントロダクション	[pdf] 2022年版	video	4/17
		Scilab課題	[pdf](更新なし)		↑
		上記資料のPython版	[pdf](更新なし)		↑
2	4/17	フーリエ変換	[pdf] 2022年版	video	4/24
3	4/24	フーリエ変換と線形システム	[pdf] 2022年版	video	5/1
4	5/1	信号処理の基礎	[pdf] 2022年版	video	5/8
5	5/8	信号処理の応用1(相関)	[pdf] 2022年版	video	5/15
6	5/15	信号処理の応用2(画像処理)	[pdf] 2022年版	video	5/22
-	5/22	中間確認テスト準備（自習）	[pdf] 2022年版		
-	5/29	中間確認テストとその解説	[pdf] 2022年版		
-	6/5	4ターム制試験日のため休み			
7	6/12	ラプラス変換	[pdf] 2022年版	video	6/19
8	6/19	古典制御の基礎	[pdf] 2022年版	video	6/26
9	6/26	行列	[pdf] 2022年版	video	7/3
10	7/3	行列と最小二乗法	[pdf] 2022年版	video	7/10
11	7/10	ロボティクス(出張によりオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2022年版	video	7/17
-	7/17	期末テスト準備（自習）	[pdf]2022年版		
-	7/24	期末確認テストとその解説（現在は大学を予定）			

日程およびテストを大学で行うかについては、随時アナウンスします。Google Classroomでもアナウンスの予定。

行列

行列．．．１，２年でやったはず

今日の内容

- 固有値とは，固有ベクトルとは
- 行列の対角化：なにをしたことになるか，なぜうれしいのか
- 情報理論・制御における行列の応用事例

キーワードは，

固有値，固有ベクトル，対角化

行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

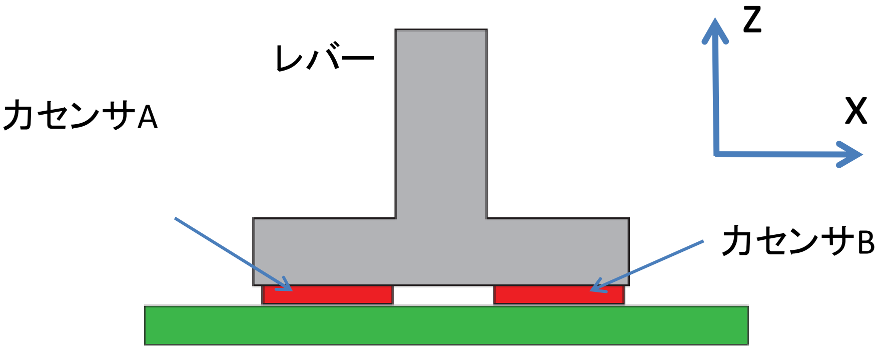
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例１）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数

（例２）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（例）2軸力センサ

（例）2軸力センサ

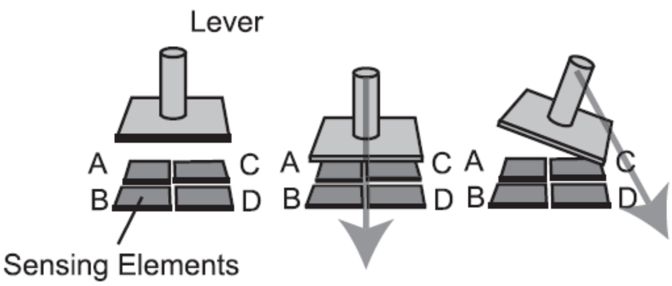


$$F_Z = x_A + x_B$$

$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（例）多軸力センサ



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

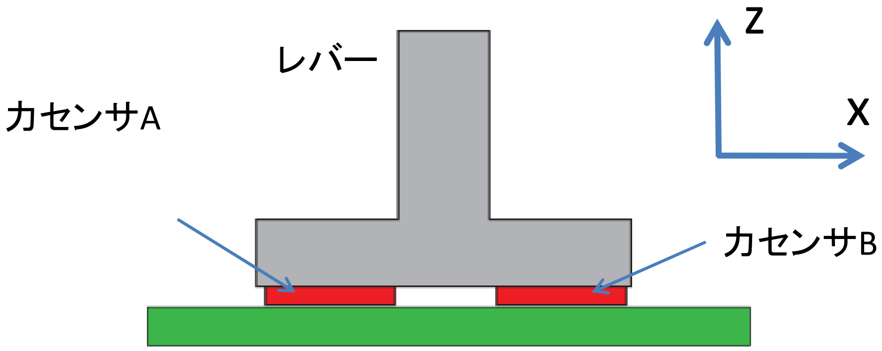
$$F_Y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

力センサのキャリブレーション（較正）

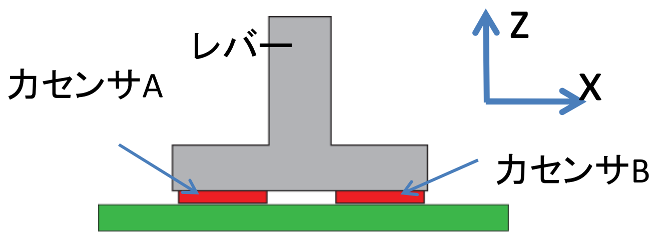


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない！！

逆行列



$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

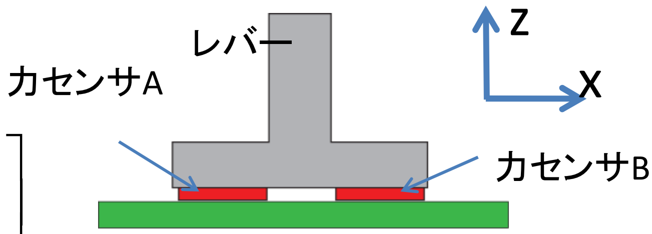
ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} m_2 \\ m_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

2回目の入力　2回目の出力

$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

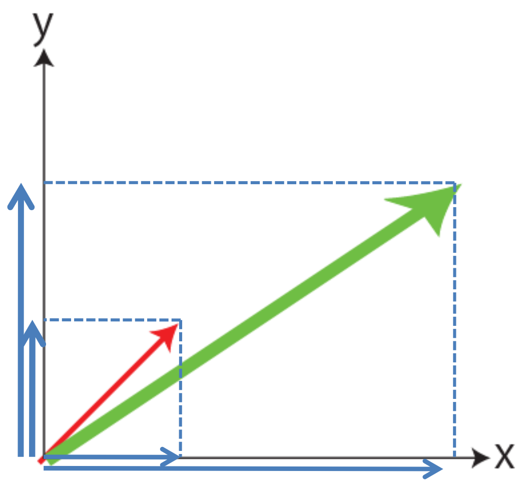
1. 2回**既知の**力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**，
センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列**F**$^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **G**の逆行列が望んだ「較正行列」**A**

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（１）

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ の時，

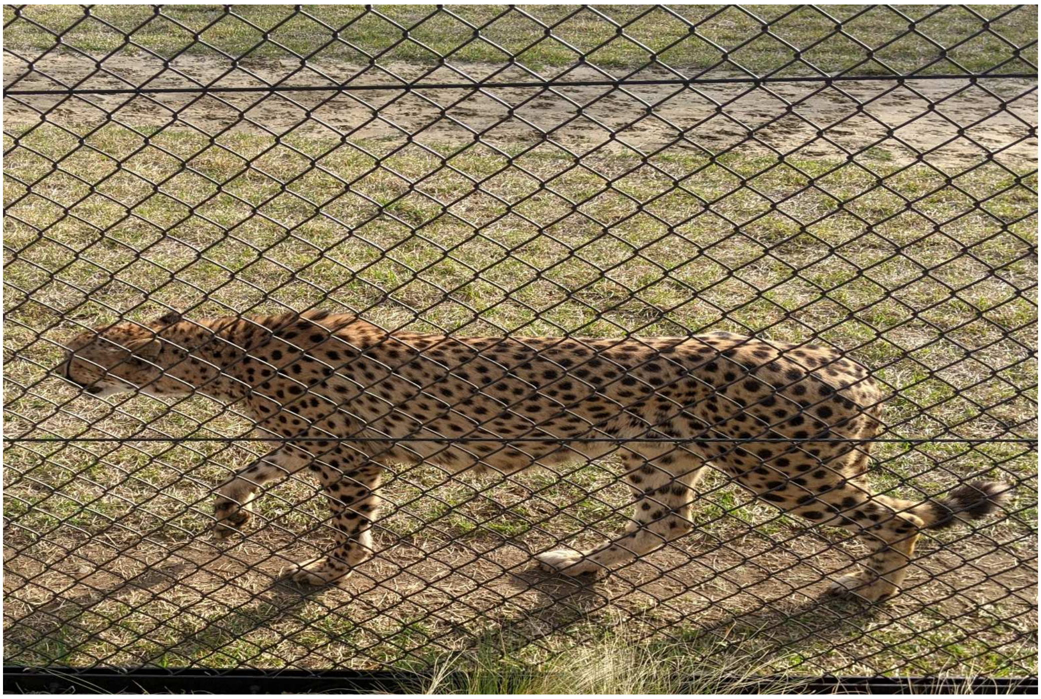
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} =$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（１）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（２）

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ は，x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

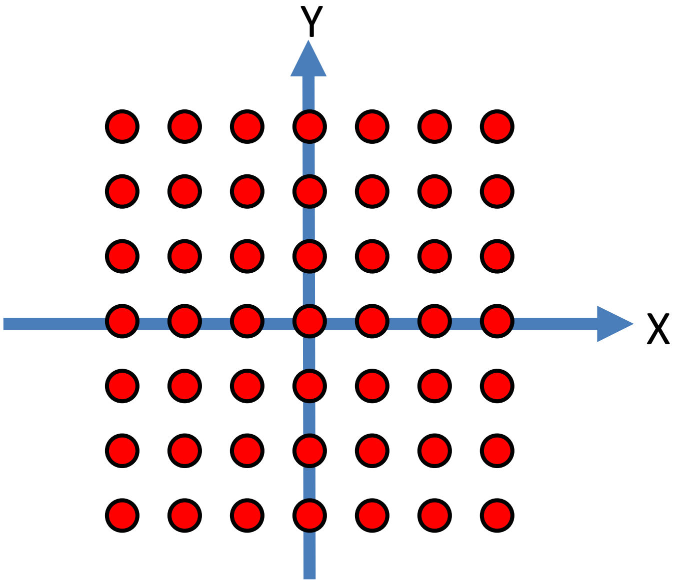
では，

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ の時は？．．．．よく分からない.

試してみる

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ で，平面上の点群はどう移動するか

X=-3～3，Y=-3～3の点群で検証

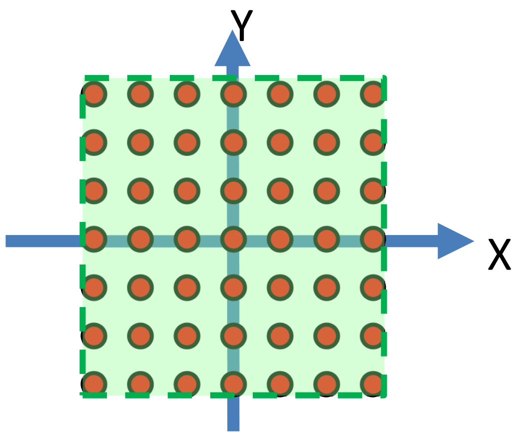


Scilabコード

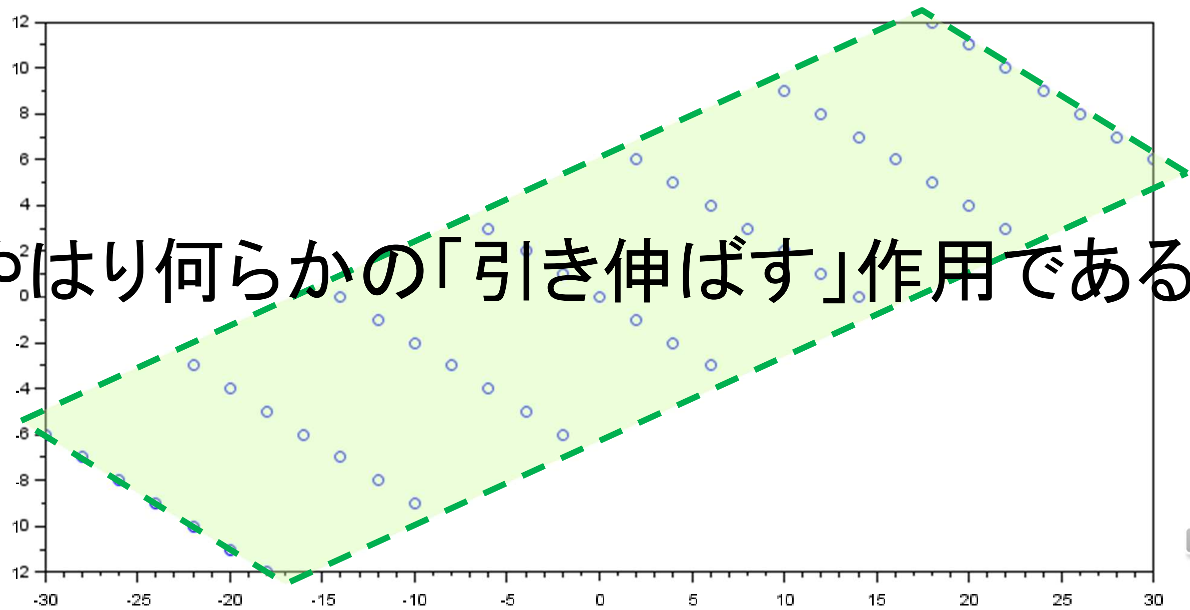
```
A=[8,-2;3,1];
s=[];
t=[];
for x=-3:3
    for y=-3:3
            r=A*[x;y];
            s=[s,r(1)]; //x座標格納
            t=[t,r(2)]; //y座標格納
      end
end
plot(s,t,'o');
```

試してみる

変換前



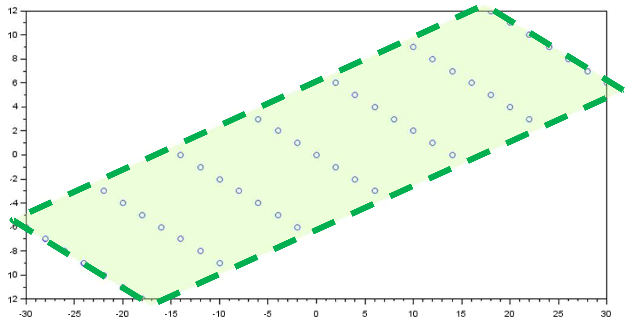
変換後



やはり何らかの「引き伸ばす」作用である

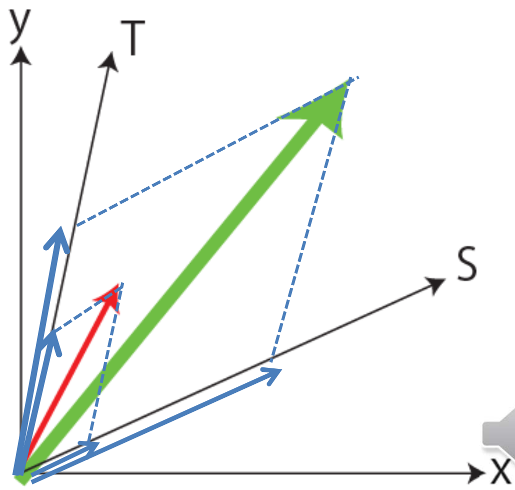
ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（２）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ の作用は



●謎のS軸成分をs倍，
●謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことである

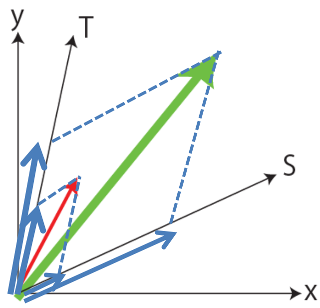
ただしもはや，
このS,T軸は直交していない．



固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル，固有値とは，
謎のS，T軸，およびs,t倍
のことである．



（求める手続き）
(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{Iu}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)u_x + bu_y = 0 \longrightarrow u_y = -(a-\lambda)u_x / b$$

$$cu_x + (d-\lambda)u_y = 0$$

$$cu_x - (d-\lambda)(a-\lambda)u_x / b = 0$$

$$\left((a-\lambda)(d-\lambda) - bc\right)u_x = 0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

この解λ1, λ2を固有値と呼び,
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ.

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -2 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば, $k = 1/\sqrt{10}$

$\lambda_2 = 7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-7 & -2 \\ 3 & 1-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

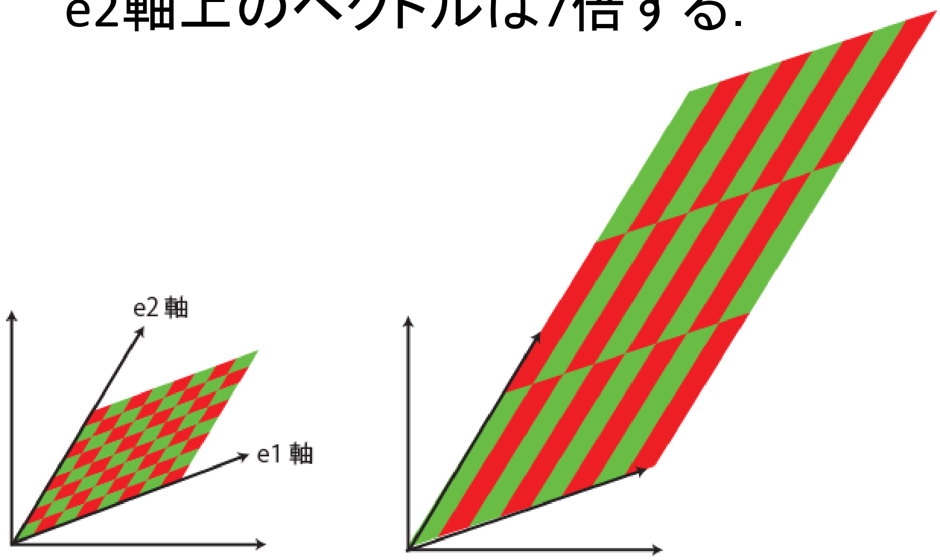
大きさを1とすれば, $k = 1/\sqrt{5}$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.

固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.

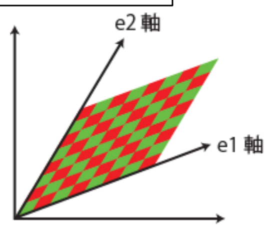


- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

行列と座標変換

- 引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

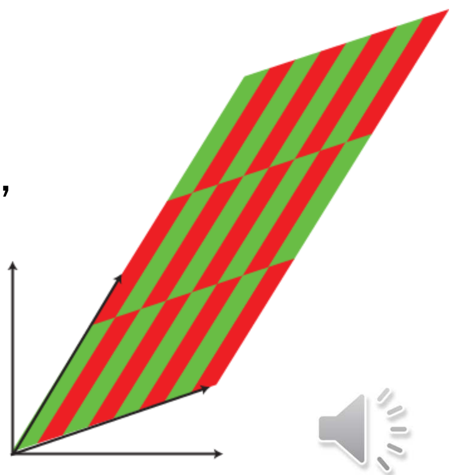
わかりにくい．．．



行列の作用を,

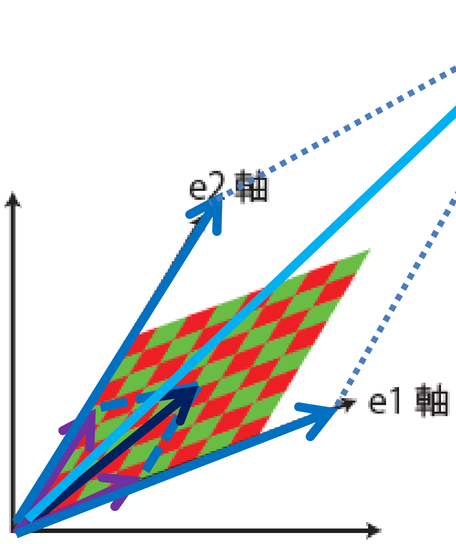
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

ように分解すればわかりやすいはず？？



まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し,
（2）各成分を引き延ばし,
（3）合成して元に戻す



（３）合成して元に戻す操作，から考える

行列の作用を,
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し,
（2）各成分を引き延ばし,
（3）合成して元に戻す

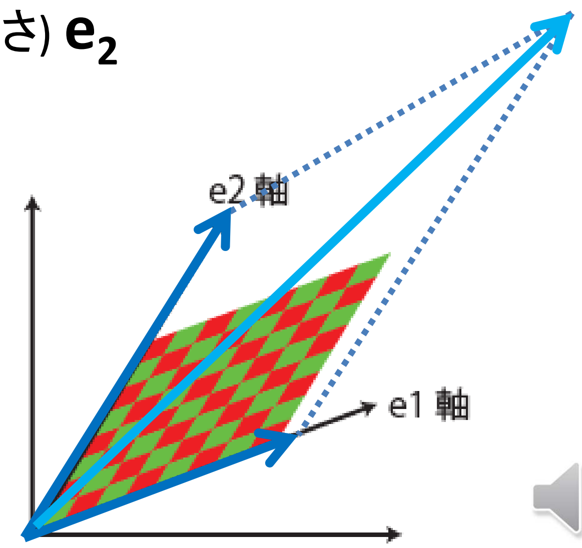
この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない

(e_1成分の大きさ) $\mathbf{e_1}$＋(e_2成分の大きさ) $\mathbf{e_2}$

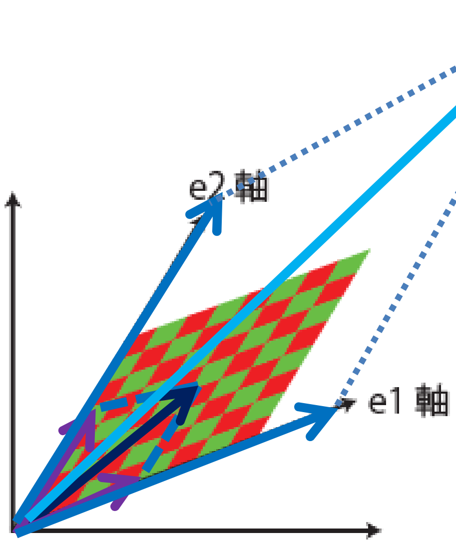
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$ とおいて

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$



行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

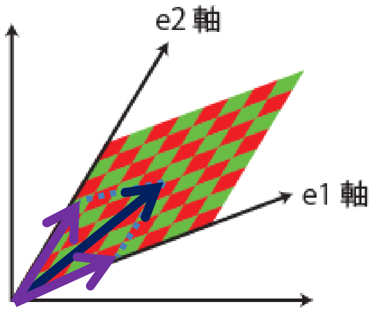


(I) 引き延ばし軸での成分表示

行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

(3)「合成」が,

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

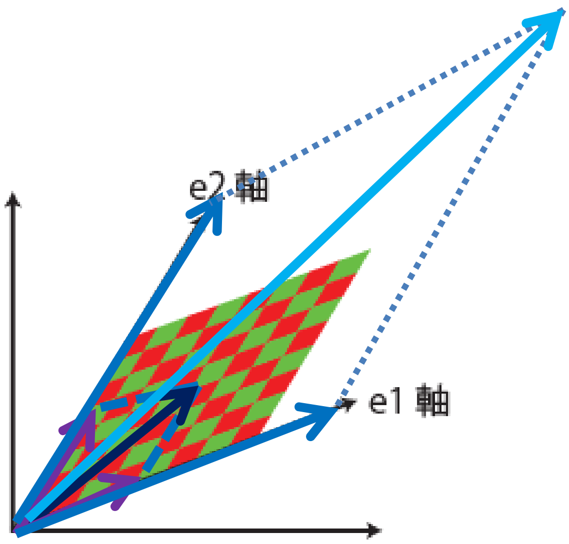


で出来るのだから,(1)はその逆のはず.
すなわち

$$\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}x\text{軸成分}\\ y\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

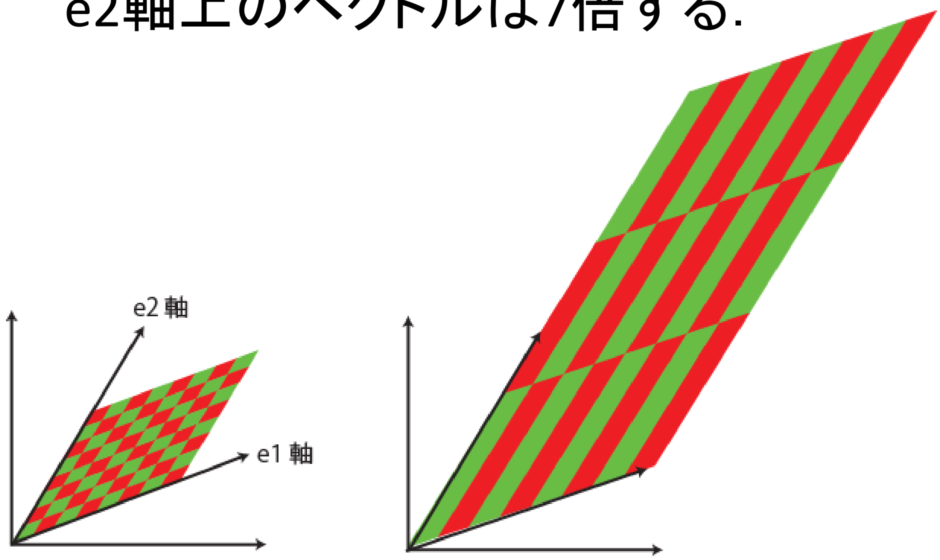
により引き延ばし軸での成分表示ができる

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す



(再)固有ベクトルと固有値 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.

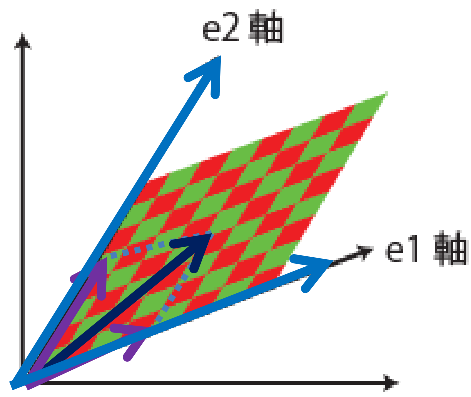


- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルが,固有値倍される

（２）引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

各成分を
固有ベクトル$\mathbf{e}_1$軸に沿って固有値λ_1倍，
固有ベクトル$\mathbf{e}_2$軸に沿って固有値λ_2倍する．

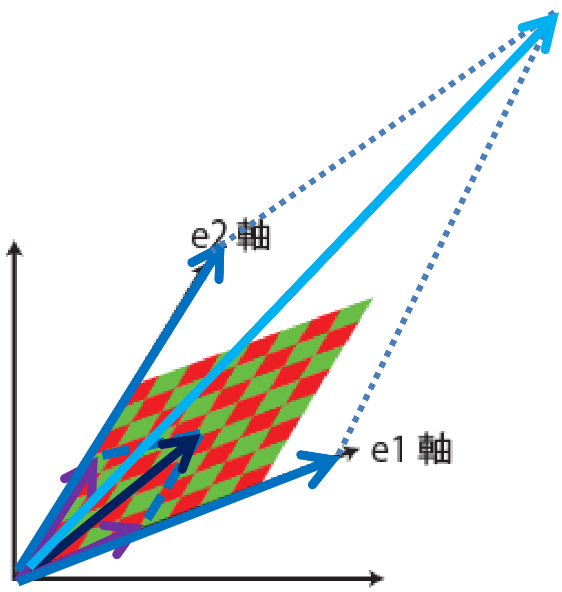


この操作は，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

まとめると

行列$\mathbf{T}$の作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



$$\mathbf{Ax} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$$

固有値を対角成分に並べた行列を$\mathbf{T}$と置く． $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax} =$$

行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。
まず、２つの固有値をλ1、λ2、固有ベクトルをe1,e2とする。

２つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

[e1,e2]をP、固有値を対角成分に持つ行列をTと書き、左辺のPを右辺に移項すると

（こちらのほうが簡単！
この式が持つ意味は前述のとおり）

レポート課題（１）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

の作用について，xy平面上の点群（X=-3～3，Y=-3～3）がどのように移動するか，例と同様に試してみること

またこの移動が，固有ベクトル，固有値の観点から妥当であることを確認すること

重要な応用：A^n

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \left(\mathbf{PTP}^{-1}\right)^n\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\cdots\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{PT}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\because \mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{bmatrix}$$

行列のn乗を簡単に計算することができる

重要な結論：nが非常に大きくなった時のA^n

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

行列の固有値λの絶対値が引き延ばしの倍率だから,

固有値の絶対値が

- 一つでも1より大きければ，A^{n}は発散する
- 全て1より小さければ，A^{n}は0に収束する

例：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & -18\\ 27 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & -18\\ 27 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}410 & -134\\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\quad \lambda_1=2\ \ \lambda_2=7$$ を代入して,

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{PT}^3\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3 & 0\\ 0 & 7^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\cdots=\begin{bmatrix}410 & -134\\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（３）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

の時は？．．．． 回転と習ったはず

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta=0$$

回転行列の固有値＝exp(jθ)

$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta=0$$

$$\cos^2\theta-2\lambda\cos\theta+\lambda^2+\sin^2\theta=0$$

$$\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$$

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}\\&=\frac{2\cos\theta\pm j\sqrt{4\sin^2\theta}}{2}\\&=\cos\theta\pm j\sin\theta\\&=\exp(\pm j\theta)\end{aligned}$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos\theta+j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}$$

$$=\sin\theta\begin{bmatrix}-j & -1\\ 1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}=0$$

$\therefore u_x=ju_y$ $\quad\mathbf{e}_1=k\begin{bmatrix}j\\1\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k=1/\sqrt{2}$

$\cos\theta-j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$\mathbf{e}_2=k\begin{bmatrix}1\\j\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k=1/\sqrt{2}$

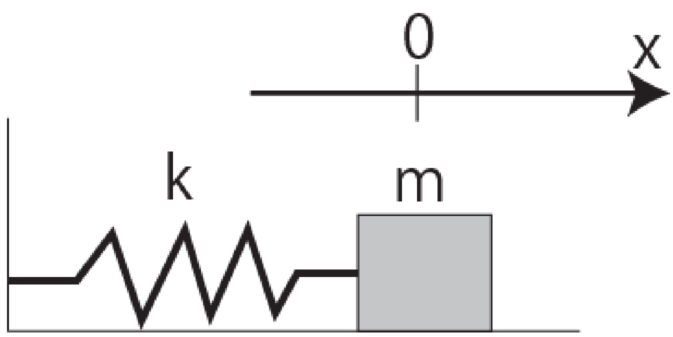
（参考）
回転行列も（拡張された）引き延ばしである

- 一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数.
- x,y軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる.
- 複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す.

制御における行列

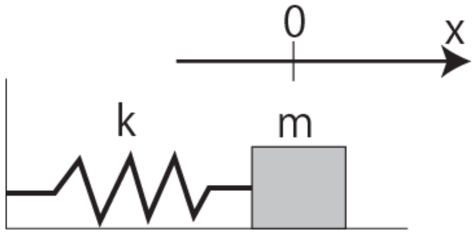
注意：ここで導入する行列は導入編用で，シミュレーションとしては不正確です.

おもりの挙動をシミュレートしたい




```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
dt=0.1;  //時間刻み
record=[];//記録用
for time= 0:dt:10       //時刻
    F=-k*x;             //ばねによって生じる力
    a=F/m;              //生じる加速度
    v= v+a*dt;          //速度
    x= x+v*dt;          //位置
    record = [record,x]; //記録（※テクニック：ベクトルが伸びていく）
end
plot([0:dt:10],record);
```

制御における行列



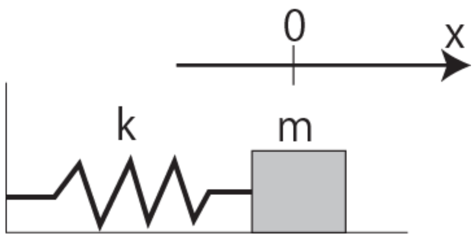

```
for time= 0:dt:10          //時刻
    F=-k*x;                //ばねによって生じる力
    a=F/m;                 //生じる加速度
    v= v+a*dt;             //速度
    x= x+v*dt;             //位置
end
```

位置，速度，加速度を並べた「状態ベクトル」**x**を定義 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から，dt時間後の新たな位置，速度，加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

制御における行列



Scilabコード

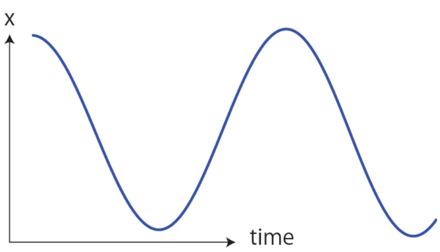
```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
a=-k/m*x;  //初期加速度
dt=0.01;   //時間刻み
record=[];//記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10  //時刻
 state= A*state;
 record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
```

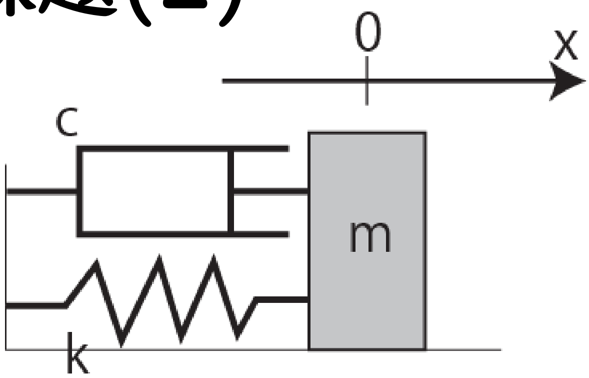


$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}_{n-1} = \cdots = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

- 行列Aのn乗を使えば，
n時刻先の状態をシミュレート可能

- 行列Aの固有値を見れば，
システムが将来(n=∞)収束するか
発散するか予測可能！

レポート課題(2)



●ダンパを加えた際の行列を考え，
同様のシミレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと，
すなわち位置が収束することを確認し，コメントに記せ
(Scilabでは固有値はspec()で求められる）

注意：ここで導入した行列はあくまで導入編用で，
シミュレーションとしては不正確です．