日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	4/10	イントロダクション	[pdf] 2022年版	video	4/17
		Scilab課題	[pdf](更新なし)		↑
		上記資料のPython版	[pdf](更新なし)		↑
2	4/17	フーリエ変換	[pdf] 2022年版	video	4/24
3	4/24	フーリエ変換と線形システム	[pdf] 2022年版	video	5/1
4	5/1	信号処理の基礎	[pdf] 2022年版	video	5/8
5	5/8	信号処理の応用1(相関)	[pdf] 2022年版	video	5/15
6	5/15	信号処理の応用2(画像処理)	[pdf] 2022年版	video	5/22
-	5/22	中間確認テスト準備（自習）	[pdf] 2022年版		
-	5/29	中間確認テストとその解説	[pdf] 2022年版		
-	6/5	4ターム制試験日のため休み			
7	6/12	ラプラス変換	[pdf] 2022年版	video	6/19
8	6/19	古典制御の基礎	[pdf] 2022年版	video	6/26
9	6/26	行列	[pdf] 2022年版	video	7/3
10	7/3	行列と最小二乗法	[pdf] 2022年版	video	7/10
11	7/10	ロボティクス(出張によりオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2022年版	video	7/17
-	7/17	期末テスト準備（自習）	[pdf]2022年版		
-	7/24	期末確認テストとその解説（現在は大学を予定）			

日程およびテストを大学で行うかについては、随時アナウンスします。Google Classroomでもアナウンスの予定。

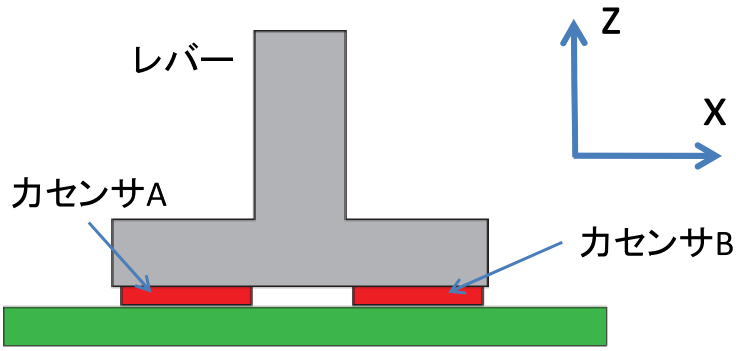
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例１）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例２）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（復習）　（例）２軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$

$$F_X = k(x_A - x_B)$$

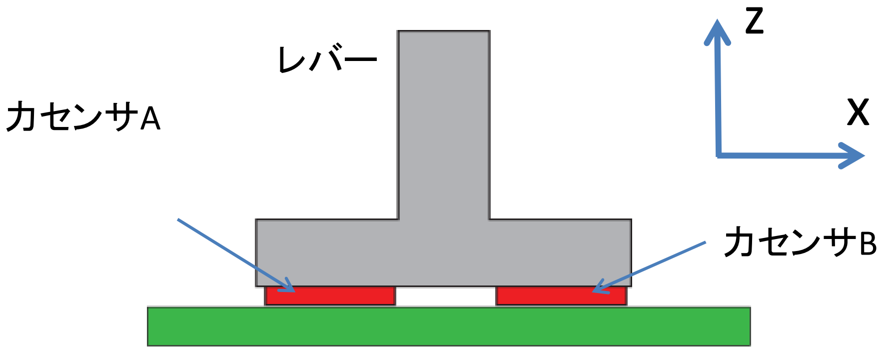
2x1ベクトル

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

2x1ベクトル

2x2行列

（復習）力センサのキャリブレーション（較正）

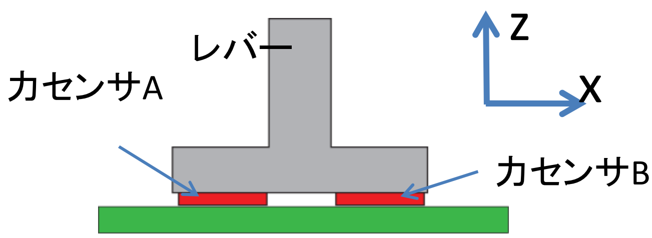


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない！！

（復習）逆行列



$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

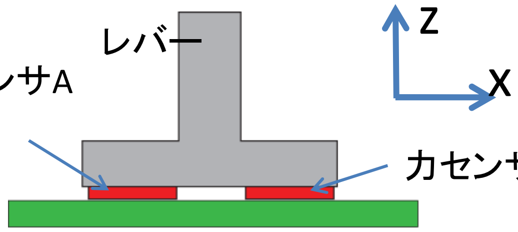
これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

（復習）逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

（復習）単位力でなくて良い

1回目の入力　　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} m_2 \\ m_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

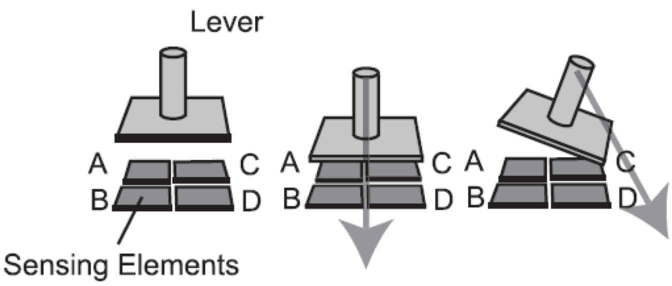
2回目の入力　　2回目の出力

$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

1. 2回既知の力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**，
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列**F**$^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

（復習） 逆行列が使えない場合



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

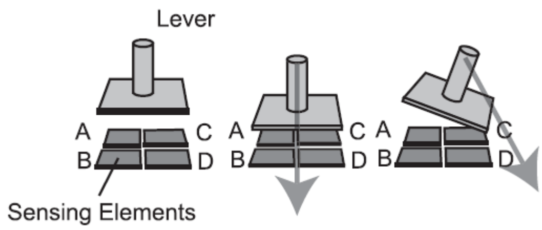
3x4行列

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

行列と最小二乗法

本日の**疑問**



$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず，キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

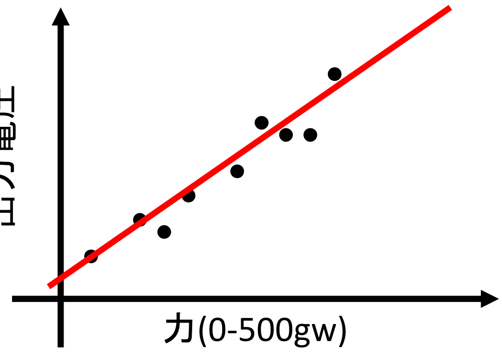
$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\ F_x\\ F_y\end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}}\left.\begin{bmatrix}x_A\\ x_B\\ x_C\\ x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

•逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる.

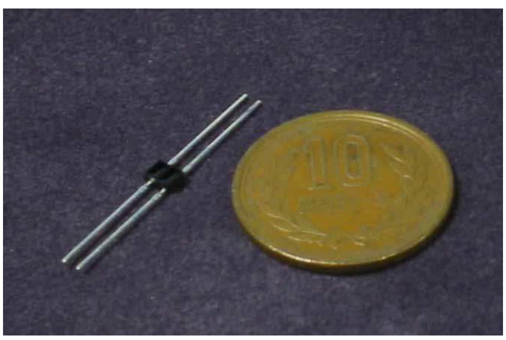
•またこれは最小二乗法という,
<u>工学全体を支える基礎的な考え</u>である.

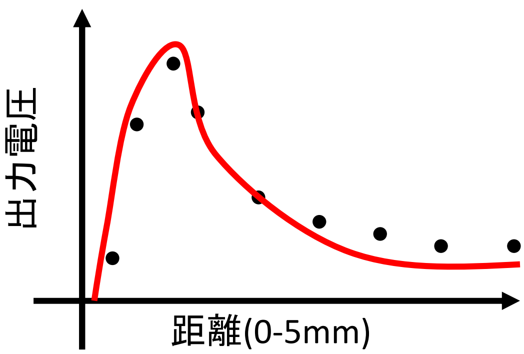
色々なセンサ

フィルム状力センサ



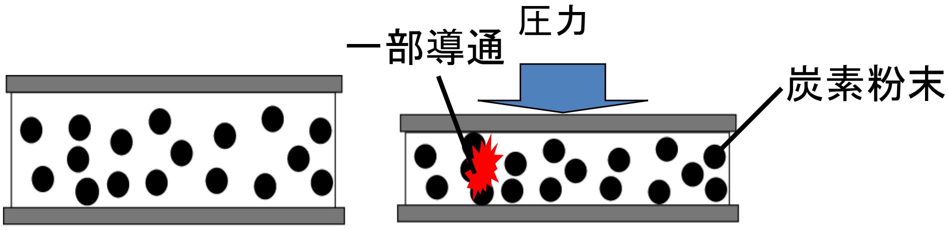
フォトリフレクタを用いた近接距離センサ

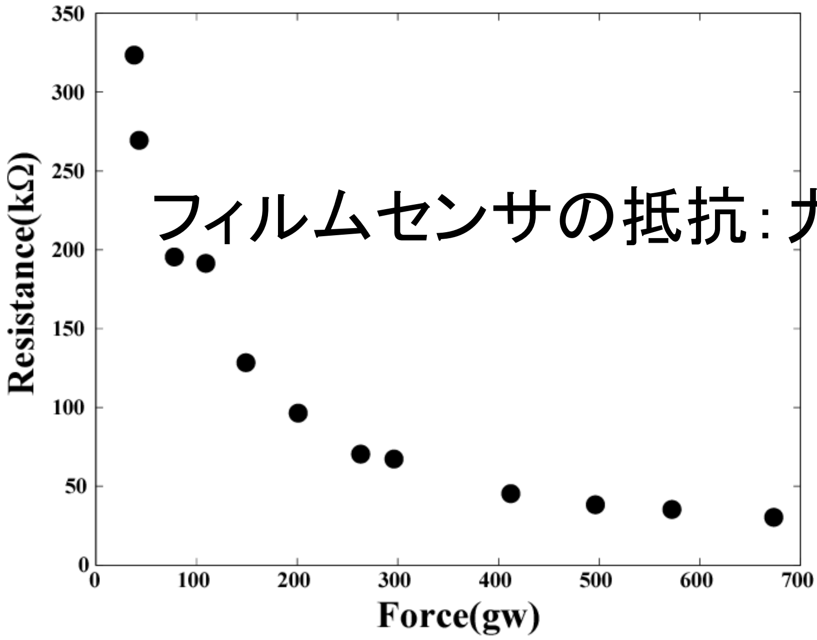




いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

フィルムセンサの定式化（１）

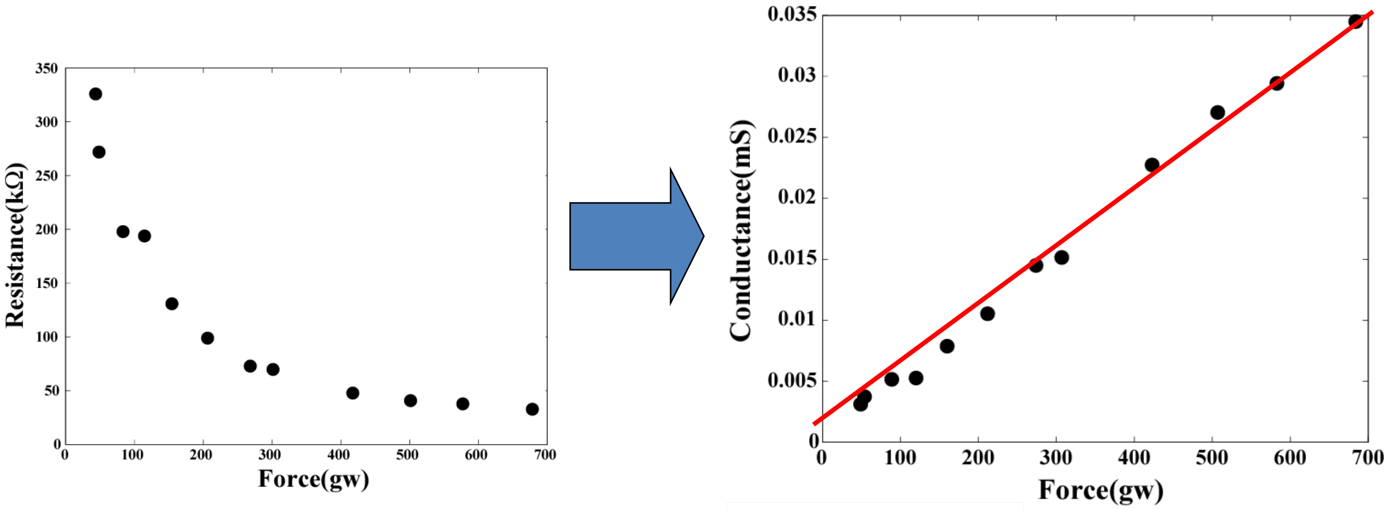




フィルムセンサの抵抗：力に反比例？

フィルムセンサの定式化（２）

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る

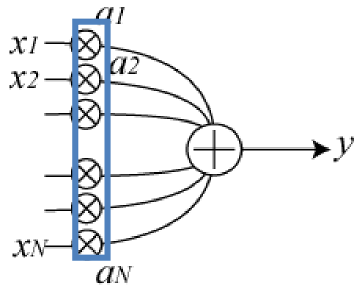


$$y = ax + b$$

x :
y :
a, b :

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

一般化



$y = a_1 x + a_2$ から一般化

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$$

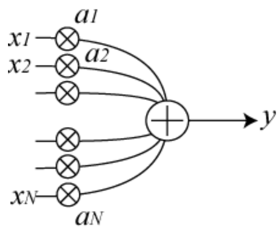
N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

目的:N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)

取れる手段:入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where $x_2 = 1$

行列の形にする



$$\boxed{y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N}$$

入力を変化させ, M回の出力を得る

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots a_N x_{1N}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots a_N x_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} + \cdots a_N x_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

X : MxN行列. 入力. 既知
y : Mx1ベクトル. 出力. 観測可能
a : Nx1ベクトル. 未知.

もしM=Nなら

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$$

実際にはM≠NでX^{-1}は存在しないことがほとんど

二乗誤差を最小化する（最小二乗法）

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

をaについて解くか.

- **X** : MxN行列. 入力. 既知
- **y** : Mx1ベクトル. 出力. 観測可能
- **a** : Nx1ベクトル. 未知.

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり, 式を完全に満たすベクトルaは, 無い

(1)測定された出力ベクトルyが誤差を含んでいると仮定

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad \text{where} \quad \mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$$

(2)誤差の大きさが最小となるようなaを
もっともらしいaとして受け入れよう.

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^{\ 2} = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

Tは転置.

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^{\ 2} = [e_1, e_2, \cdots e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a}$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1}\|\mathbf{e}\|^2 & \frac{\partial}{\partial a_2}\|\mathbf{e}\|^2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial a_N}\|\mathbf{e}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} =$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$$

$$\mathbf{a} =$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2x^2 - 2ayx + y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2x^2 - 2ayx + y^2\right)$$
$$= 2x^2a - 2yx$$
$$= 0$$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

擬似逆行列

結論：未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる.

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{X}^{\#}$：擬似逆行列(Pseudo Inverse)

擬似逆行列は逆行列の拡張となっている

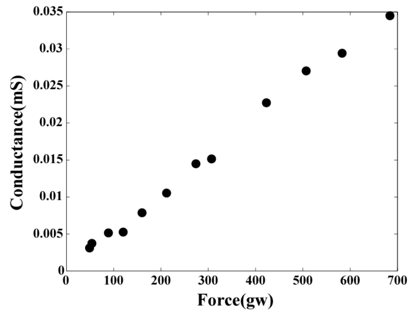
行列Xが正則な場合

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$$=$$

$$=$$

（再考）フィルムセンサの場合



$y = a_1 x + a_2$ $\begin{cases} x : \text{力：既知入力} \\ y : \text{コンダクタンス．測定結果} \\ a_1, a_2 : \text{未知パラメータ} \end{cases}$

これは

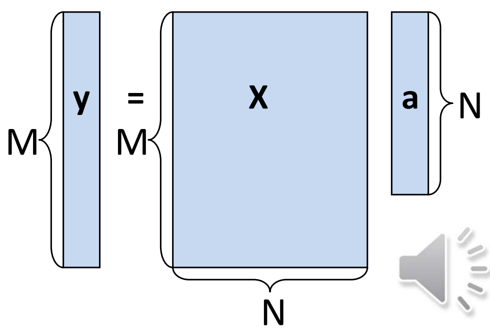
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{where} \quad x_2 = 1$$

とみなせる．

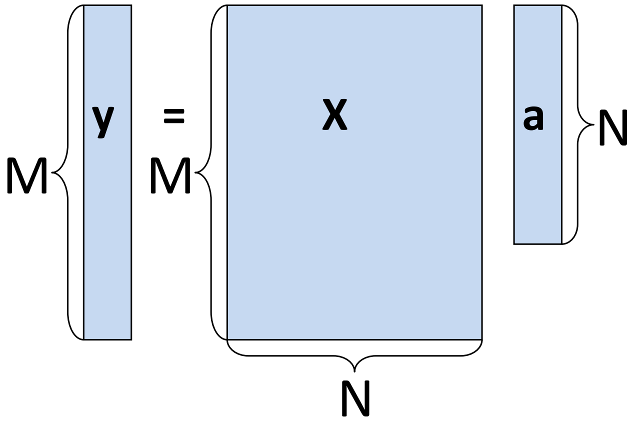
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

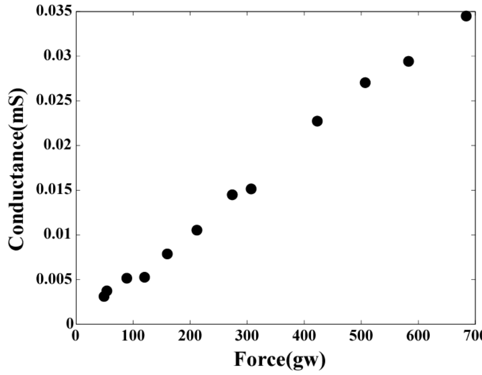
$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 &= a_1 x_{21} + a_2 1 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



（再考）フィルムセンサの場合





よって，

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \quad \text{where} \quad \mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る.

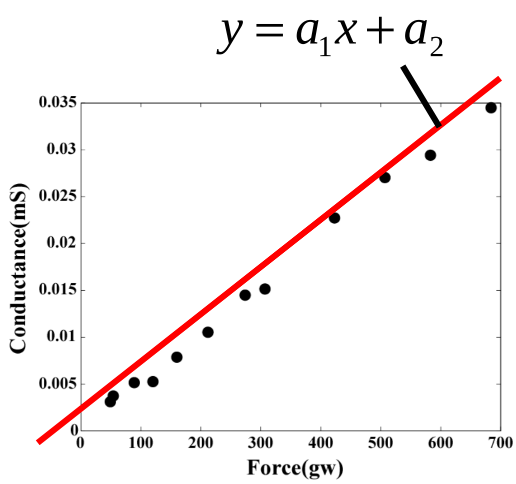
手作業で求めてみる

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \\
&= (\mathbf{X}^{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{y} \\
&= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum {x_i}^2 \sum y_j}{M\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

何を最小化したか

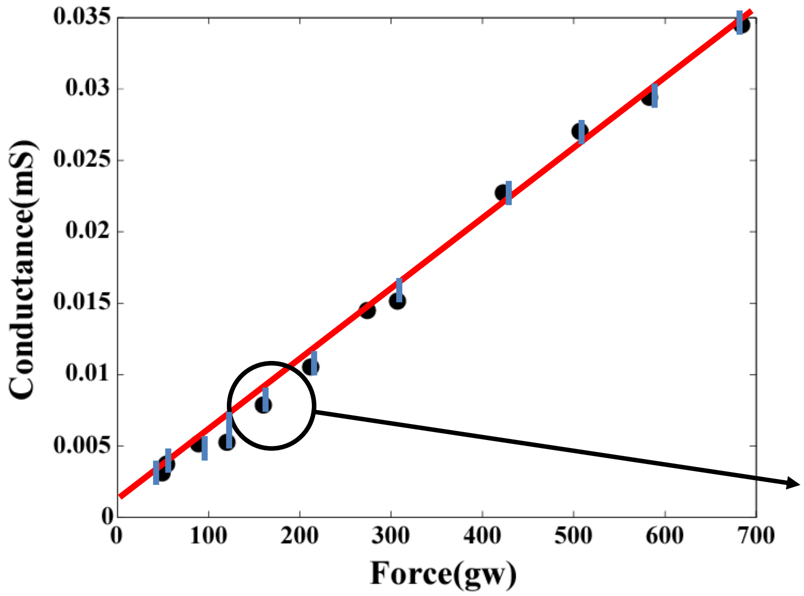
$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

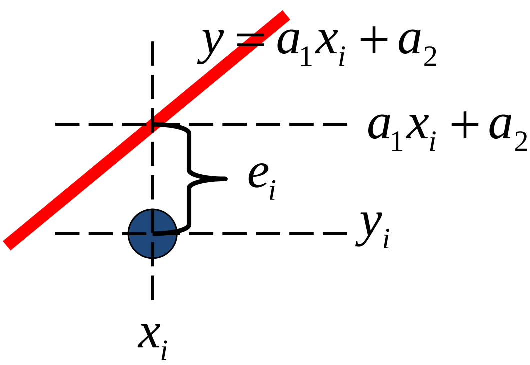
$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\left\|\mathbf{e}\right\|^2 = \mathbf{e}^*\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M} {e_i}^2}$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$

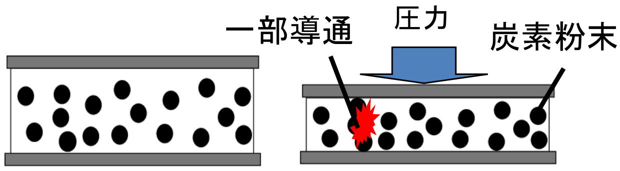




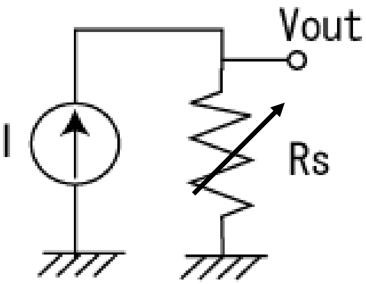
データと直線の，
「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

（参考）実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら



(a)



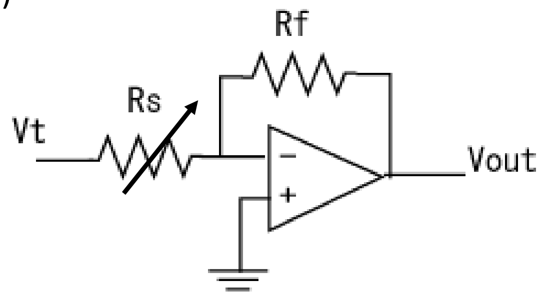
I: 定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス（抵抗の逆数）」を測定するなら

(b)



Vt:定電圧源
Rs : フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗

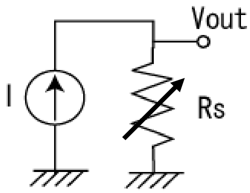
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

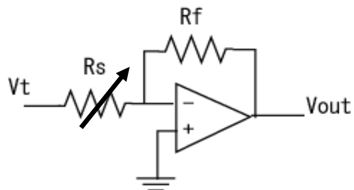
「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

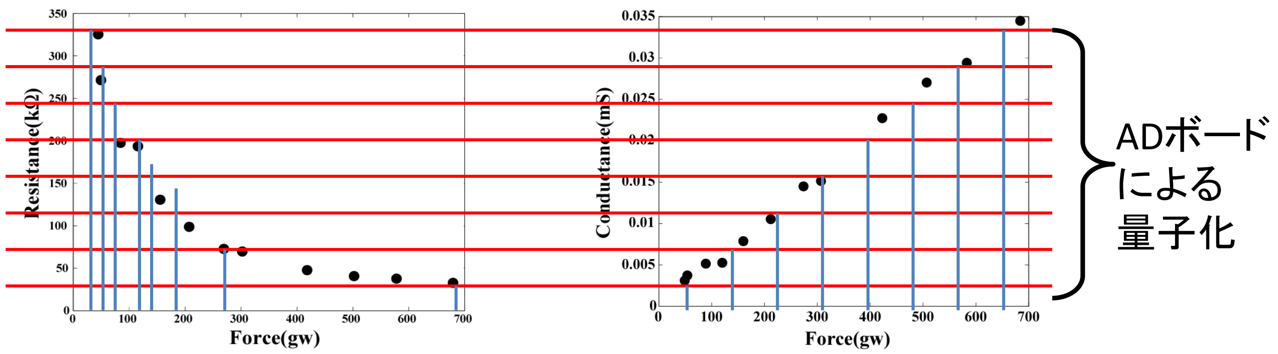
別にそれでもよい. しかし良い設計ではない.

(a)出力は抵抗に比例



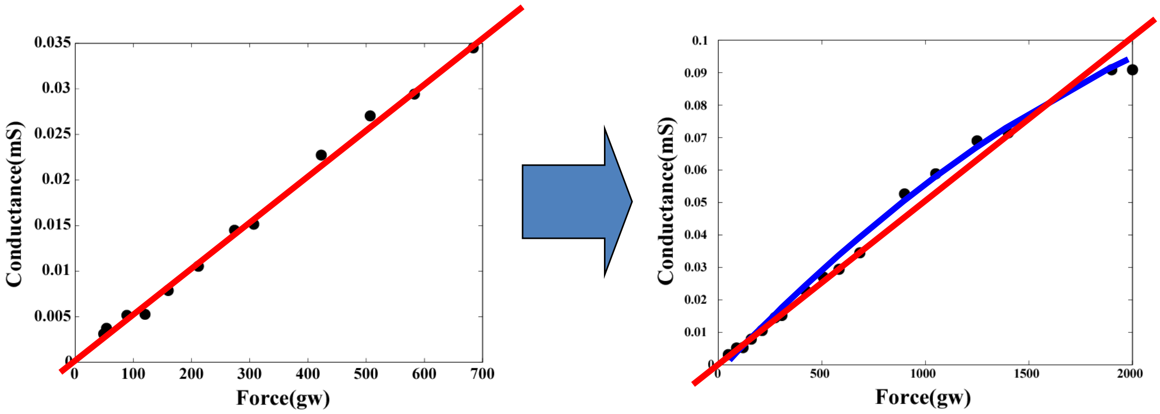
(b)出力はコンダクタンスに比例





- アナログ部による線形化の意義
＝ADボードによる量子化の影響を低減
「ダイナミックレンジを広げる」とも言う.

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい.



直線近似 $y = a_1 x + a_2$ ではフィッティングできない気が. . .

(直線領域だけで使う, という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる.

$$y = a_1 x + a_2$$

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

$$y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

もはや直線フィッティングの公式は使えない.

多項式近似

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x: 力: 既知入力 \\ y: コンダクタンス. 測定出力 \\ a1, a2, a3: 未知パラメータ \end{array} \right.$$

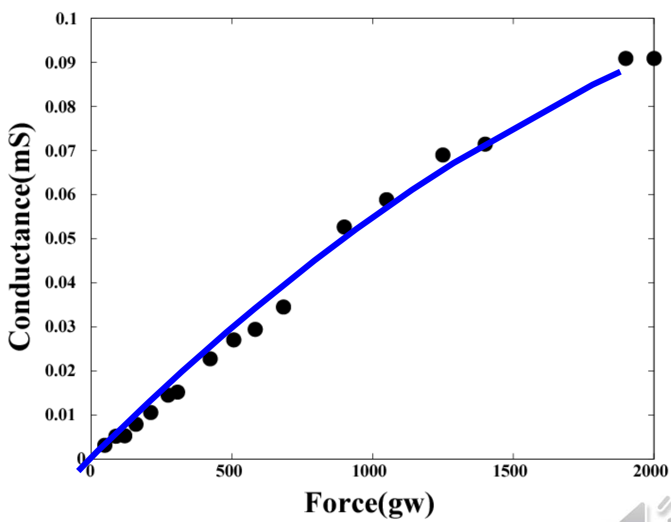
何度も測定する

$$y_1 = a_1 x_1^{\ 2} + a_2 x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1 x_2^{\ 2} + a_2 x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

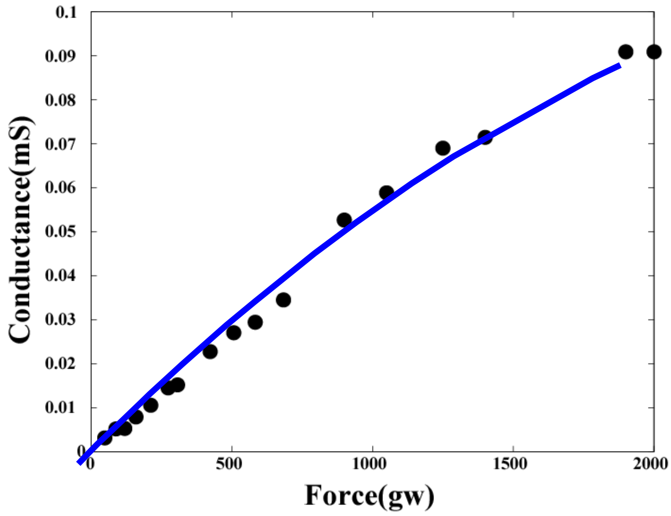
$$y_M = a_1 x_M^{\ 2} + a_2 x_M + a_3$$



多項式近似

$$y_1 = a_1 x_1{}^2 + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2{}^2 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M{}^2 + a_2 x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^2 & x_1 & 1 \\ x_2{}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M{}^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ の形に出来たので,

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により3つの未知パラメータを求めることが出来る. (計算機のしごと)

元に戻って．．．何をしたかったか

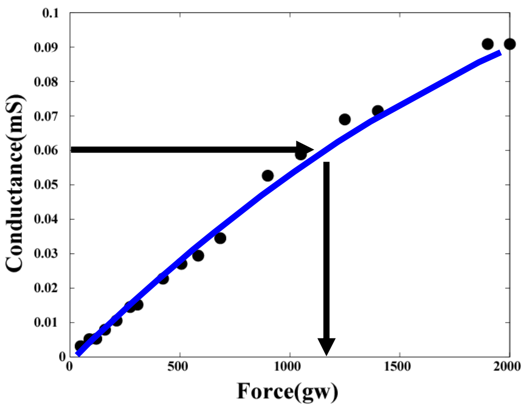
(1) $y = a_1 x + a_2$

(2) $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

(3) $y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

x : 力 : 既知の入力
y : コンダクタンス. 測定した出力
a1, ... , a4: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
測定出力yから力xを逆算することがゴール.



(1) $x = (y - a_2)/a_1$

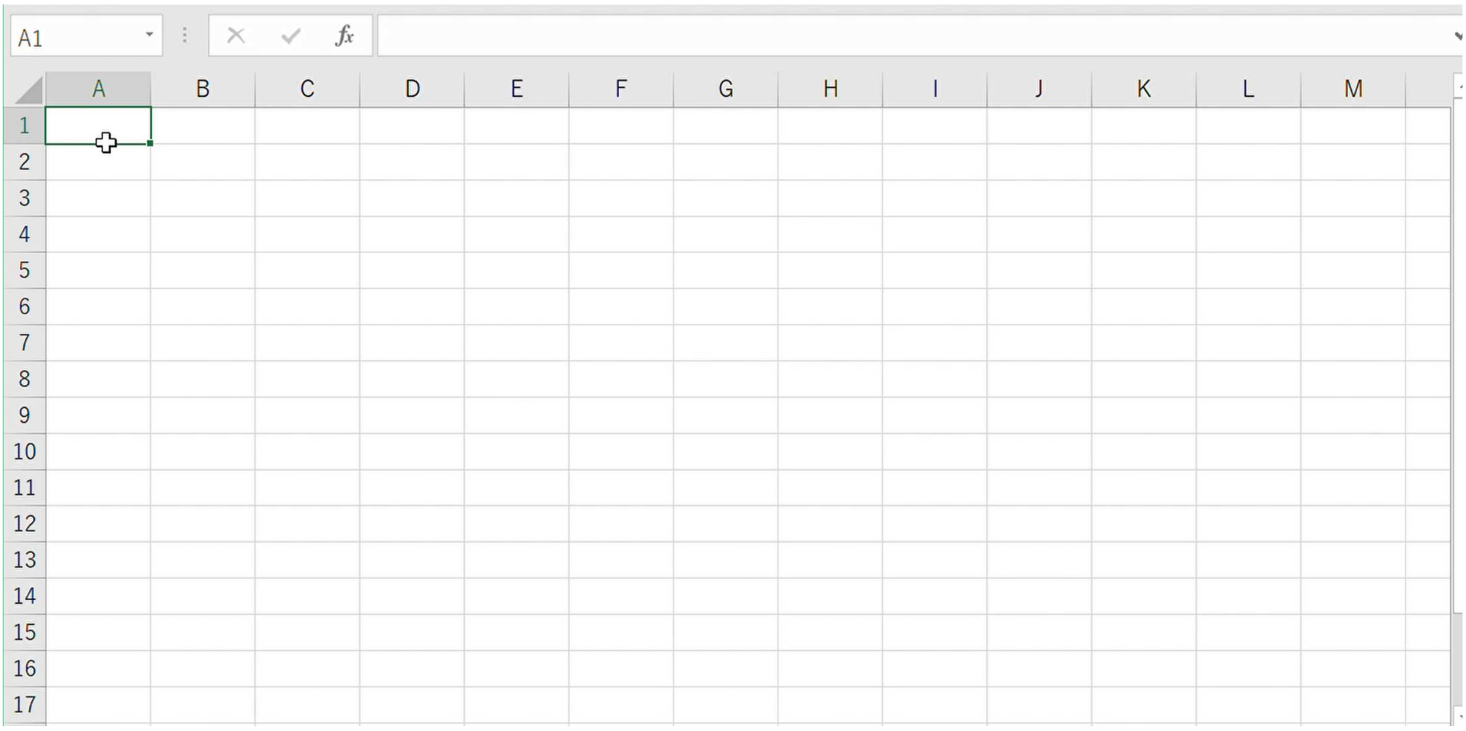
(2) $a_1 x^2 + a_2 x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2{}^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + (a_4 - y) = 0$

$x = \cdots$ (3次方程式の解の公式)

デモ：Excelでのフィッティング

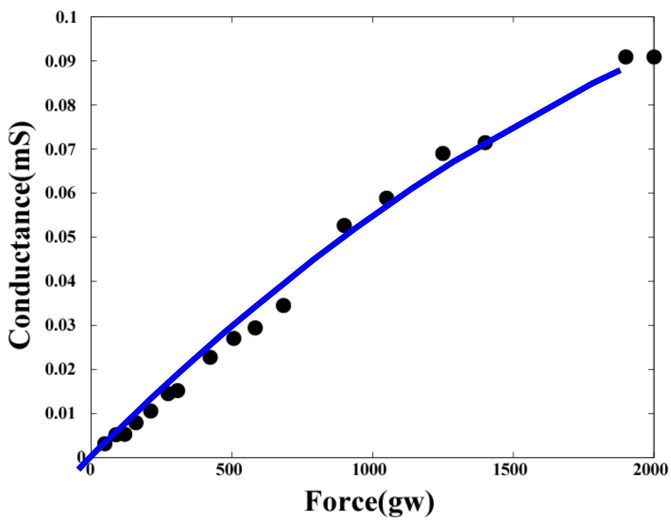


X軸は等間隔でなくて良いし、単調増加でなくて良い
N-1次多項式だと完璧なフィッティングになってしまうのはなぜ？（行列の形は？）

整数次数の多項式でなくて良い

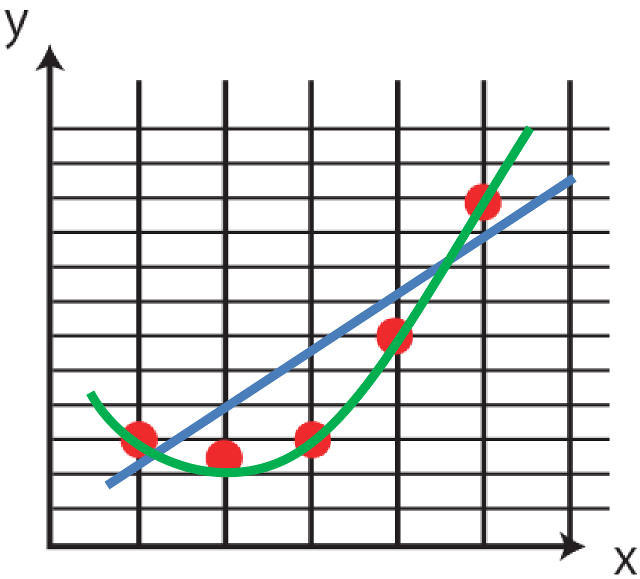
$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$
$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_M$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



関数であっても良い．たとえばlog(x)など．

レポート課題(1)



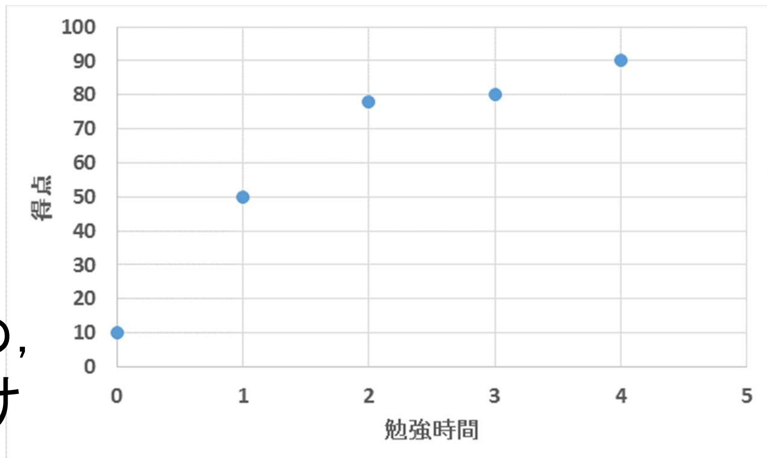
次のデータ系列に対して,
Scilab/pythonを用いて,
(1) 直線による近似,
(2) 2次曲線による近似を適用,
パラメータを求め,
曲線とデータをグラフに描け

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる.
当然自分でinv(A’*A)*A’とやっても同じ.

レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して,
y=a1 * log(x+1) + a2
を仮定してパラメータを求め,
曲線とデータをグラフに描け



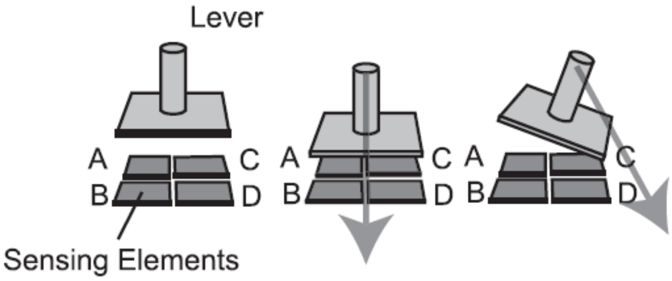
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X（勉強時間）	3	4	2	0	1
Y（試験の点）	80	90	78	10	45

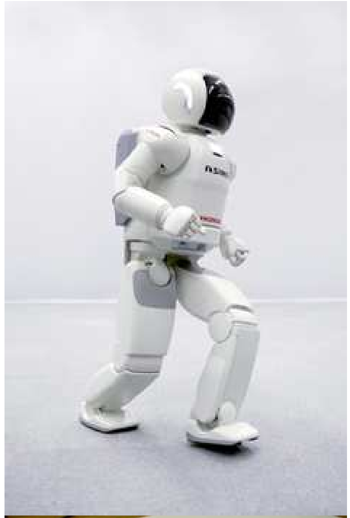
最小二乗法
事例紹介

最小二乗法事例紹介

- 多軸センサのキャリブレーション
- 直交（同期）検波の最小二乗法による理解
- ~~フォトリフレクタのキャリブレーション~~

応用事例（I）多軸力センサ





$$F_Z = k_1\left(x_A + x_B + x_C + x_D\right)$$
$$F_X = k_2\left(\left(x_A + x_B\right) - \left(x_C + x_D\right)\right)$$
$$F_Z = k_3\left(\left(x_A + x_C\right) - \left(x_B + x_D\right)\right)$$

$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

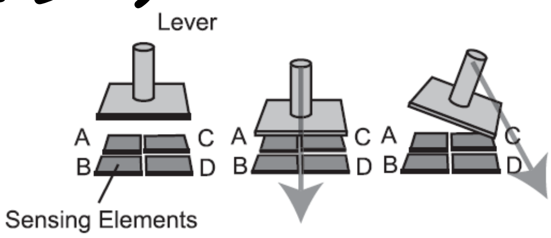
3x4行列

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

応用事例（I）多軸力センサ

$$\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8\\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}$$



K1からk12までの係数を求める問題。
Fx,Fy,Fzとして既知の力を何度も方向を変えて加える。出力x_A,x_B,x_C,x_Dの組が毎回得られる。

$$F_z = [k_1 k_2 k_3 k_4]\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}$$

一要素を取り出してみる

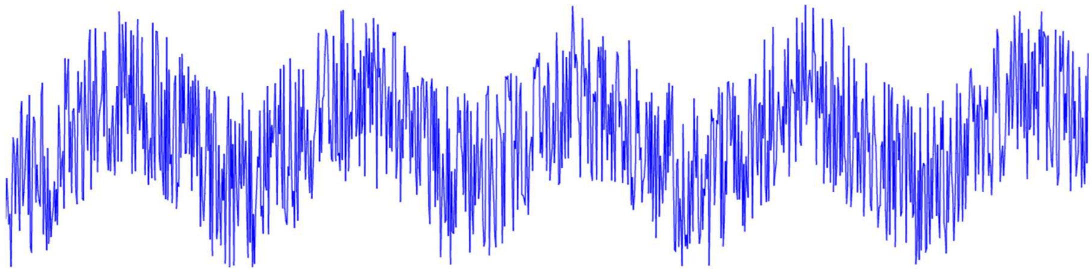
$$[F_{z1} F_{z2} \dots F_{zN}] = [k_1 k_2 k_3 k_4]\begin{bmatrix}x_{A1} & x_{A2} & & x_{AN}\\ x_{B1} & x_{B2} & & x_{BN}\\ x_{C1} & x_{C2} & \cdots & x_{CN}\\ x_{D1} & x_{D2} & & x_{DN}\end{bmatrix}$$

N回の計測を行う

$$\begin{bmatrix}x_{A1}x_{B1}x_{C1}x_{D1}\\ x_{A2}x_{B2}x_{C2}x_{D2}\\ \vdots\\ x_{AN}x_{BN}x_{CN}x_{DN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{z1}\\F_{z2}\\ \vdots\\F_{zN}\end{bmatrix}$$

擬似逆行列の計算により係数を求めることができる

応用事例(2)：直交（同期）検波



問題を定式化

信号f(t)が,

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi) + noise(t)$$

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている.

計測データから，振幅Aと，位相ずれφを求めるには？

数式（復習）

信号にsin(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

積分時間Tは充分長い.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T noise(t)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\left(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

数式（復習）

信号にcos(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

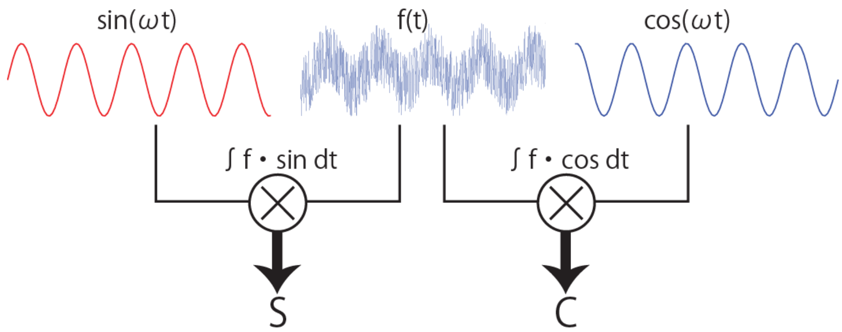
積分時間Tは充分長い．

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\right)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t)dt+\int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\left(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\right)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt+A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\sin(\phi)
\end{aligned}
$$

直交（同期）検波：数式（復習）

$$S=\frac{A}{2}\cos(\phi)$$

$$C=\frac{A}{2}\sin(\phi)$$



位相差

$$\frac{C}{S}=\tan(\phi)$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

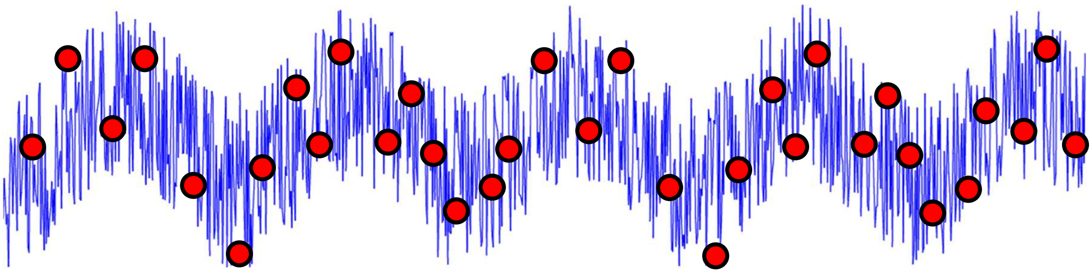
振幅

$$
\begin{aligned}
S^2+C^2 &= \frac{A^2}{4}\left(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right) \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$A=2\sqrt{S^2+C^2}$$

ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定

ただし周波数ωは既知．
得られたデータ[y1,y2,…,yN]から，振幅Aと位相∮を求める．

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} =$$

$$=$$

$$=$$

これにより，行列の形，$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ に変形することが出来た．

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$=$

残る

$\propto$

ほぼ消える
（適切なNで完全に0）

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

つまり，元信号y(t)に
- cos(ωt)をかけて積分したものと，
- sin(ωt)をかけて積分したもの

によって，振幅と位相を求めることができる．

これはこれまでの数式的理解と全く同一．