



## 日程

| 講義番号 | 講義日            | 講義内容                               | pdf             | video                   | レポート締め切り |
|------|----------------|------------------------------------|-----------------|-------------------------|----------|
| 1    | 10/3           | 周期関数、フーリエ級数の定義                     | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 10/10    |
| 2    | 10/10          | フーリエ級数の計算例                         | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 10/17    |
| 3    | 10/17          | 複素フーリエ級数、直交関数系                     | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 10/24    |
| 4    | 10/24          | 周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式                | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 10/31    |
| 5    | 10/31 (オンデマンド) | 非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例                | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 11/7     |
| 6    | 11/7           | フーリエ変換の性質                          | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 11/14    |
| 7    | 11/14          | デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式 | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 11/21    |
| -    | 11/21          | 調布祭準備                              |                 |                         |          |
| -    | 11/28          | 中間確認テストとその解説 (前半)                  | 中間確認テスト用問題集     | [📄 pdf](2022年版)         |          |
| -    | 12/5           | 休講日 (クォーター制との調整による)                |                 |                         |          |
| 8    | 12/12          | 離散時間信号と離散時間フーリエ変換 (教科書外)           | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 12/19    |
| 9    | 12/19 (オンデマンド) | 離散フーリエ変換 (教科書外)                    | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 12/26    |
| 10   | 12/26          | 離散フーリエ変換の性質 (教科書外)                 | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 1/9      |
| 11   | 1/9            | サンプリング定理                           | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 1/16     |
| 12   | 1/16           | ラプラス変換の定義と性質                       | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 1/23     |
| 13   | 1/23           | 線形常微分方程式のラプラス変換による解法               | [📄 pdf](2023年版) | <a href="#">video</a> 📺 | 1/30     |
| -    | 1/30           | 期末確認テストとその解説 (後半)                  | 期末テスト用問題集       | [📄 pdf](2022年版)         |          |



## 前回のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
  - 微分に対するラプラス変換
  - 積分に対するラプラス変換
  - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
  - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た



## (復習) ラプラス変換と変換表

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

$$1 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s-a}$$

$$t \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \quad \longrightarrow \quad \left( \frac{1}{s-a} \right)^2$$

$$t^n \quad \longrightarrow \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\dot{f}(t) \quad \longrightarrow \quad sF(s) - f(0)$$

$$\sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\int_{t=0}^t f(t) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t - \tau) \quad \longrightarrow \quad \exp(-s\tau) F(s)$$

$$\delta(t) \quad \longrightarrow \quad 1$$

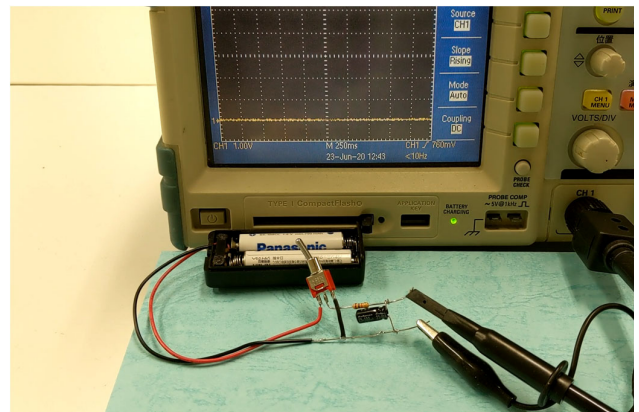
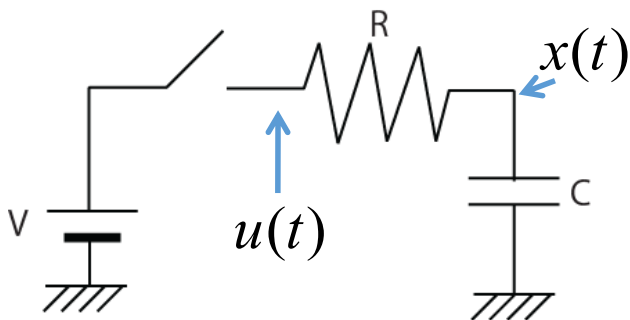


# 今日の目標

ラプラス変換で常微分方程式を解く  
たたみ込みの性質を使う



## (復習) ラプラス／逆ラプラス変換実例

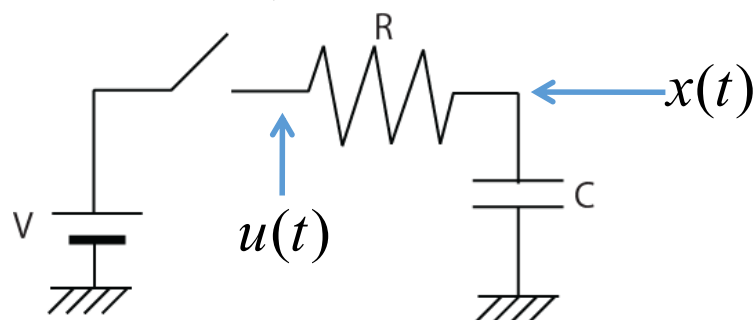


- 入力：抵抗 $R$ の左側の電圧  $u(t)$ . 時刻 $t>0$ で $V$
- 出力：コンデンサの電圧 $x(t)$ .

これも微分方程式をラプラス変換で解いた例といえ



## 微分方程式として見直す



●電流*I*を考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = \frac{1}{C} \int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

*U*は時刻*t>0*で*V* (一定値) だから,

$$RC\dot{x} + x = V$$

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

これは

$$y' + ay = b$$

という形の微分方程式



## 微分方程式として見直す

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

両辺をラプラス変換 (ただし*x(0)=0*)

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{V}{RC} \frac{1}{s}$$

$$X = \frac{V}{RC} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$X = V \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

ラプラス変換表から

$$x(t) = V \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \right)$$



# ラプラス変換による微分方程式解法例 1

$$y' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$$Y =$$

$$Y =$$

$$=$$

$$\therefore Y =$$

$$y =$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 5/3 \end{cases}$$

検証

$$y(0) = \frac{1}{3}(\exp(0) + 5 \exp(0)) = 2$$

$$y' + 4y$$

$$= \frac{1}{3}(-\exp(-t) - 20 \exp(-4t) + 4 \exp(-t) + 40 \exp(-4t)) = \exp(-t)$$



# ラプラス変換による微分方程式解法例 2

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ \quad = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ \quad = s^2Y - 2 \end{cases}$$

より

$$Y =$$

$$=$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 2 \end{cases}$$



$$\therefore Y =$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y =$$

検証 (初期値のみ)

$$\begin{cases} y(0) = -2 \exp(0) + 2 \exp(0) = 0 \\ y' = 6 \exp(-3t) - 4 \exp(-2t) \\ y'(0) = 6 \exp(0) - 4 \exp(0) = 2 \end{cases}$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 3

$$y'' + 5y' + 6y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ \quad = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ \quad = s^2Y - 2 \\ L(\exp(-2t)) = \frac{1}{s+2} \end{cases}$$

より

$Y =$

$Y =$

$\therefore Y =$

$y =$

検算  $y' = e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 2$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = s(sY) - y'(0) \\ \quad = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$Y =$

$=$

$=$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{a}{s+2i} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+1}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (s-2i)(s+1)a + (s+2i)(s+1)b + (s+2i)(s-2i)c \\ &= (a+b+c)s^2 + ((-2i+1)a + (2i+1)b + (2i-2i)c)s + (-2ia + 2ib + 4c) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+c = \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = \\ -2ia + 2ib + 4c = \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \quad =$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$\begin{cases} c = -a - b \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = 0 \\ (-2i-4)a + (2i-4)b = 1 \end{cases}$$

$$a =$$

$$b =$$

$$a = \frac{2i+1}{2i-1} \frac{2i-1}{-20i} =$$

$$c = -a - b = \frac{2i+1+2i-1}{20i} = \frac{4i}{20i} =$$

$$\frac{4-2i-8i-4-4-8i-2i+4}{2i-1} b = \frac{-20i}{2i-1} b = 1$$



# ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{a}{s+2i} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+1}$$

$$a = \frac{2i+1}{-20i} \quad b = \frac{2i-1}{-20i} \quad c = \frac{1}{5}$$

∴  $y =$

$=$

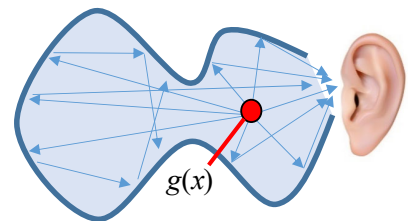
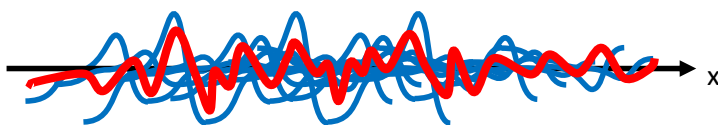
$=$

これが  $y''+4y = \exp(-t)$   $y(0)=0$   $y'(0)=0$  を満たしているかの検証は省略

．．． 意外と大変． 簡単にできる方法はないか？

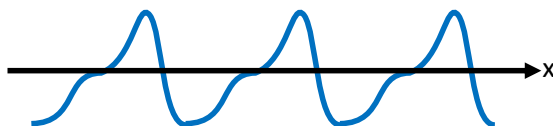


(復習) 原音と響きの定式化

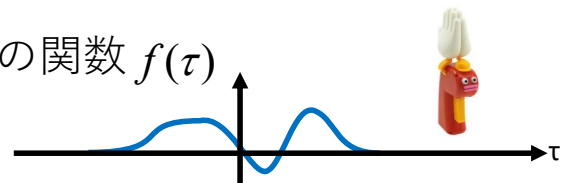


「遅れ時間 $\tau$ に対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら、

原音  $g(x)$



反響の関数  $f(\tau)$



$\tau$ だけ遅れた反響音成分は  $f(\tau)g(x-\tau)$

遅れ $\tau$ に対応した反響の強さ  $\tau$ だけ遅れた原信号

これらがすべての $\tau$ で発生し、加算されるから、最終的な信号は

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これを関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込み積分とよぶ



# ラプラス変換におけるたたみ込み

通常のとたたみ込み  $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$

ラプラス変換であつかう各関数は $x < 0$ では0としている.

$$\begin{cases} f(\tau) = 0 \\ g(x-\tau) = 0 \end{cases}$$

このため、たたみ込みの積分の有効範囲は

ラプラス変換で扱う関数のたたみ込み

$$f * g =$$



# ラプラス変換におけるたたみ込み

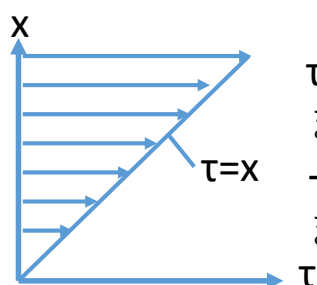
$$f * g = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

ラプラス変換してみる

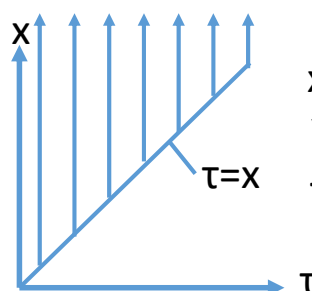
$$L(f * g) = \int_0^{\infty} f * g(x) \exp(-sx) dx$$

=

=



$\tau$ を0から $x$ まで積分  
→ $x$ を0から $\infty$ まで積分



$x$ を $\tau$ から $\infty$ まで積分  
→ $\tau$ を0から $\infty$ まで積分



## ラプラス変換におけるたたみ込み

$$L(f * g) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) \exp(-sx) dx \right\} d\tau$$

$x - \tau = y$ と置いて =

=

=

よってラプラス変換においても、たたみ込み積分→掛け算となる  
ということは、逆に、 $L(f)L(g)$  で表される関数の  
逆ラプラス変換は  $f * g = \int_0^x f(\tau)g(x - \tau)d\tau$  となる



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = s(sY) - y'(0) \\ \quad = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

より  $s^2Y + 4Y = \frac{1}{s+1}$

$$(s^2 + 4)Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 4)(s + 1)}$$

ここで、たたみ込みを使う。

$$Y =$$

ラプラス変換表より

$$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ だから}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s^2 + 4} \rightarrow \\ \frac{1}{s+1} \rightarrow \end{cases}$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{1}{s^2 + 4} \cdot \frac{1}{s + 1} \quad \begin{cases} \frac{1}{s^2 + 4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin(2t) \\ \frac{1}{s + 1} \rightarrow \exp(-t) \end{cases}$$

たたみ込み

$$y = \int_0^x f(\tau) g(x - \tau) d\tau =$$

=

積分を部分積分で解く

$$J = \int_0^x \sin(2\tau) \exp(\tau) d\tau =$$

=

=



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$J = \sin(2x) \exp(x) - 2 \cos(2x) \exp(x) + 2 - 4J$$

$$J =$$

元の式に代入

$$y =$$

=

たたみ込みを利用することでより簡単？に計算できた



## 今日のまとめ

- ラプラス変換をつかって微分方程式を解く練習をした.
- ラプラス変換のたたみ込みの性質を知り, それを使って簡単に? 解ける場合を示した.



## 今日のレポート

ラプラス変換によって次の微分方程式を解け

$$y'' + 4y' + 3y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内



## 期末試験

- 主に練習問題集から出しますが発展的内容も含みます。**後半が範囲です。**



## 授業評価

各科目の先生方には、以前のマークシート方式の場合と同様に、授業時間内にアンケートに回答する時間を設けて確実に実施していただくようお願い申し上げます。

アンケート実施期間の間に授業がある科目については、授業最終回に**5～10分**程度、アンケートに回答する時間を設定して下さい。（回答済み、または回答できない学生は待機）

もし授業時間内にアンケートを実施できなかった場合は、学生へ期間内の回答を促すようご協力をお願いいたします。

### ●学生がアンケートに回答する流れ

各学生にはメールが個別に送られ、そこには履修登録をしている科目のアンケートを行う**URL** (ウェブページの所在) が科目数分記されています。**URL**は学生と授業科目の対ごとに異なるものが割り当てられます。パスワード認証は行いません。

