

応用数学第一

第二回

梶本裕之



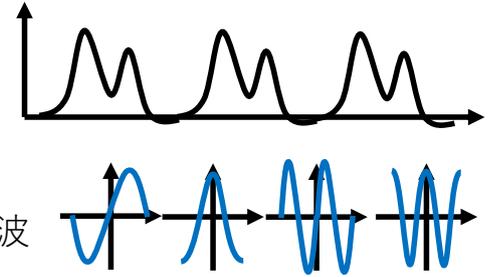
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/3	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2023年版)	video	10/10
2	10/10	フーリエ級数の計算例	[pdf](2023年版)	video	10/17
3	10/17	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2023年版)	video	10/24
4	10/24	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2023年版)	video	10/31
5	10/31 (オンデマンド)	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2023年版)	video	11/7
6	11/7	フーリエ変換の性質	[pdf](2023年版)	video	11/14
7	11/14	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2023年版)	video	11/21
-	11/21	調布祭準備			
-	11/28	中間確認テストとその解説 (前半)	中間確認テスト用問題集	[pdf](2022年版)	
-	12/5	休講日 (クォーター制との調整による)			
8	12/12	離散時間信号と離散時間フーリエ変換 (教科書外)	[pdf](2023年版)	video	12/19
9	12/19 (オンデマンド)	離散フーリエ変換 (教科書外)	[pdf](2023年版)	video	12/26
10	12/26	離散フーリエ変換の性質 (教科書外)	[pdf](2023年版)	video	1/9
11	1/9	サンプリング定理	[pdf](2023年版)	video	1/16
12	1/16	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2023年版)	video	1/23
13	1/23	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2023年版)	video	1/30
-	1/30	期末確認テストとその解説 (後半)	期末テスト用問題集	[pdf](2022年版)	



前回のまとめ

1. 動機「関数」の性質を「分析」したい
2. 多くの現象は「周期的」である
3. 周期関数であれば、同じ周期関数である正弦波の「合成」によって表せるのではないか
4. 表せると仮定した表式をたてた
5. その未知係数を積分計算によって求めた
6. 動機は解決されたか：ある関数が、複数の「周波数」の波の合成であることがわかったという意味で「分析」できた。



$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$



(前回) フーリエ級数展開まとめ

周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

ただし

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

周期 2π の場合

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



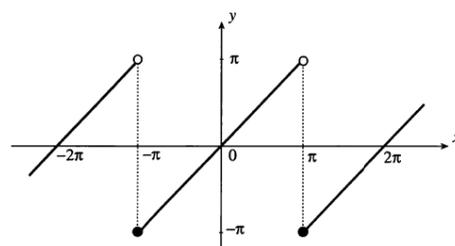
今日の目標

- フーリエ級数展開を，多数の計算例で身につける.
- Gibbs現象を知る.



のこぎり波のフーリエ級数展開

周期 2π ， $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x$ となる関数をフーリエ級数展開する.



$$a_n =$$

$$b_n =$$

$$=$$

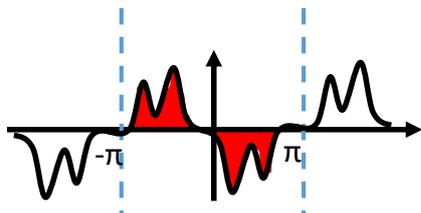
$$=$$

$$=$$

$$=$$

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数 (後述).
奇関数の原点对称の積分は0

$$=$$

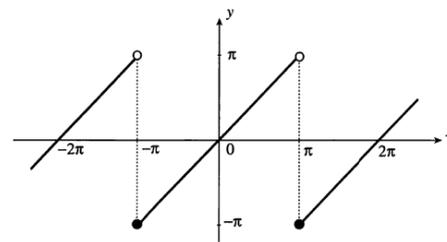


$$= \left\{ \right.$$

あるいは



のこぎり波のフーリエ級数展開



$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

$$= 2 \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \frac{2}{6} \sin(6x) + \frac{2}{7} \sin(7x) - \dots$$

書いてみよう.

n=1まで

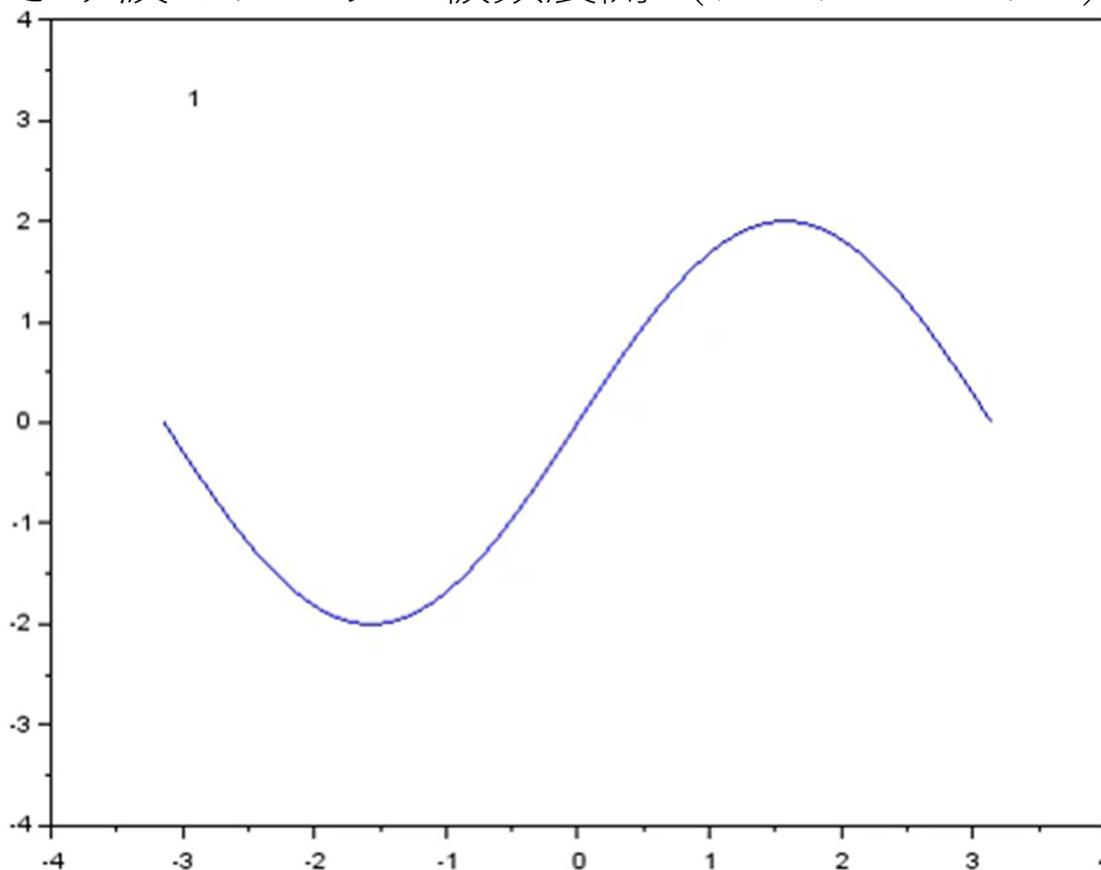
n=2まで

n=3まで

確かにのこぎり波に近づいていくように見える



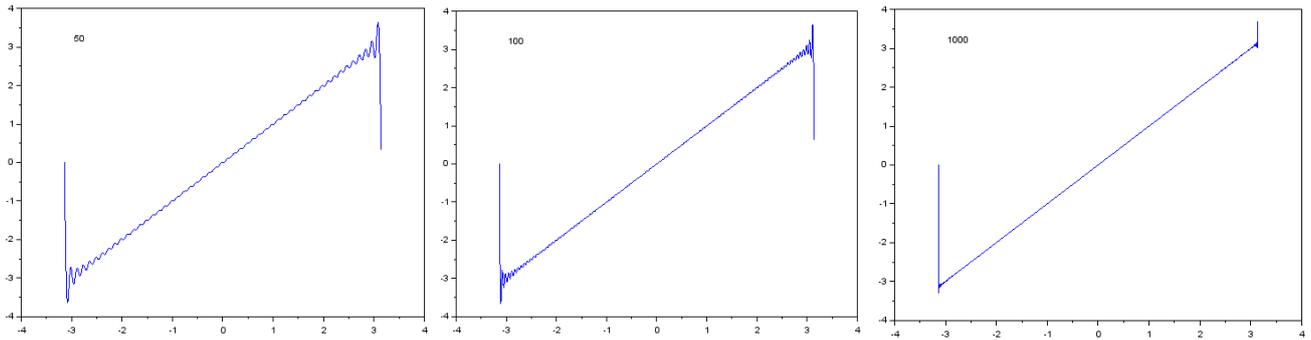
のこぎり波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



n=1から50までのシミュレート



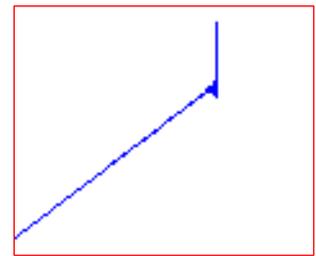
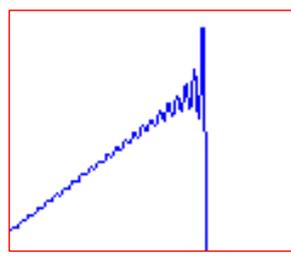
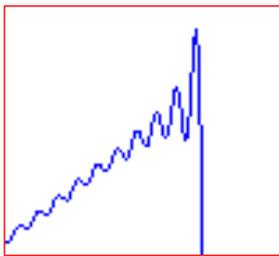
Gibbs現象



n=50まで

n=100まで

n=1000まで



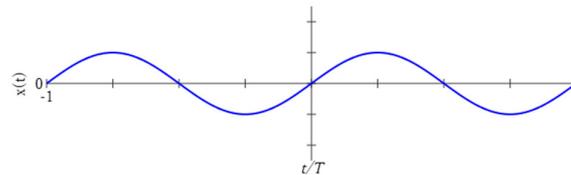
全体的にはもとの関数に収束しているが、不連続点で「ヒゲ」が出る。
このヒゲは細くなっていくが、大きさ自体は小さくなっていかない



波形合成と音色（名城大学柳田先生のページ）

正弦波重ね合わせによる波形合成と音色

$$x(t) = \sum_{k=1}^N b_k \sin(k\omega_0 t) \quad \text{or} \quad x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



k 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$|a_k|$
 $|b_k|$

位相反転

振幅値 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00

加算次数 N (最大25) スライダー ●線形 ○dB

加算波形 ●sin ○cos (○矩形波 ○三角波)

係数プリセット 正弦波 のこぎり波 矩形波 三角波

音再生

ボリューム 25 (音量注意!)

基本周波数 440.0 Hz

<https://vrlab.meijo-u.ac.jp/edu/sinusoidal-wave-synthesis.html>

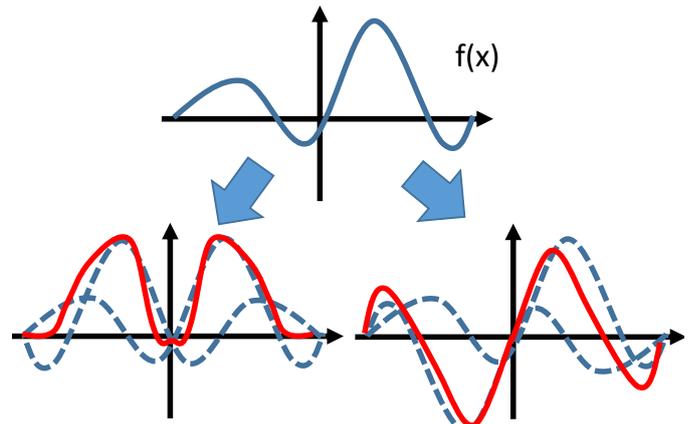
任意の関数は、偶関数成分と奇関数成分に分けられる

任意の関数 $f(x)$ に対して、

$$g(x) =$$

$$h(x) =$$

とすると、



よって $g(x)$ は偶関数、 $h(x)$ は奇関数であり、

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

またこの分解は一意である。なぜならもし異なる分解 g', h' があると、

$$f(x) =$$

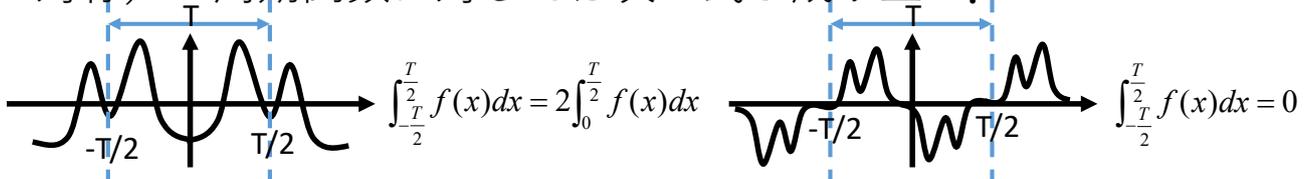
左辺は偶関数、右辺は奇関数で矛盾。

つまり任意の関数は偶関数と奇関数の合成で一意に表せる。



偶関数と奇関数の積分

(前回の資料より) 偶関数 (y 軸線対称な関数) と奇関数 (原点対称) の周期関数に対しては次の式が成り立つ。



偶関数 \times 奇関数 = 奇関数

$g(x)$ を偶関数、 $h(x)$ を奇関数とする。

$$g(-x) =$$

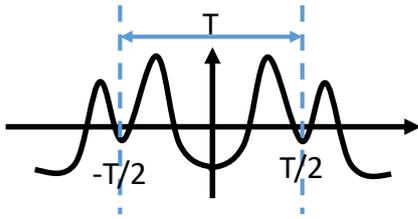
$$h(-x) =$$

$k(x)$ を偶関数 \times 奇関数とすると、

よって $k(x)$ は奇関数である



偶関数, 奇関数のフーリエ級数展開



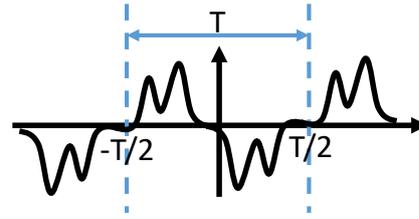
$f(x)$ が偶関数の場合

$$b_n =$$

=

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数.
奇関数の原点对称の積分は0

$$f(x) \approx$$



$f(x)$ が奇関数の場合

$$a_n =$$

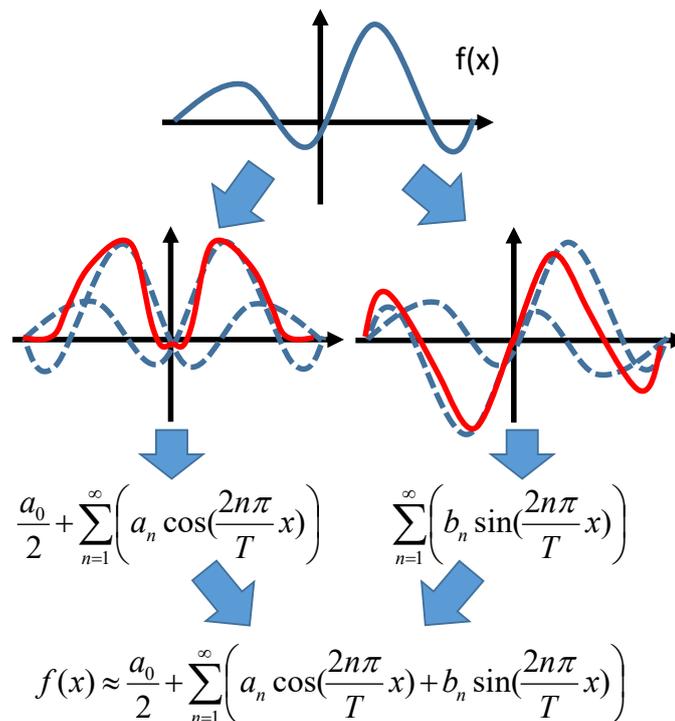
=

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数.
奇関数の原点对称の積分は0

$$f(x) \approx$$

つまり, 偶関数はcosの成分「だけ」で表せ, 奇関数はsinの成分「だけ」で表せる。

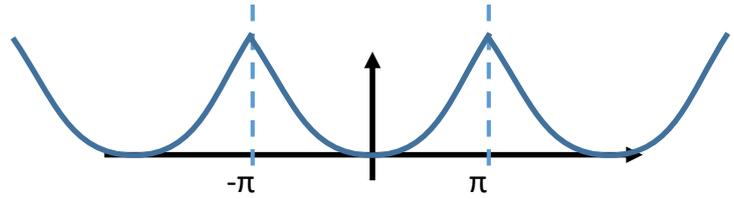
フーリエ級数展開と偶関数・奇関数成分



結論: フーリエ級数展開におけるcos, sin関数の項は, 関数の偶関数成分と奇関数成分をそれぞれ分解したものである。

フーリエ級数展開の例さらに： x^2 ，周期 2π

周期 2π ， $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x^2$ となる関数をフーリエ級数展開。
偶関数だから \cos の項だけで表せるはず。



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

n が0の場合，

$$a_0 =$$

=

=

=

=

=

=

$0 \sim \pi$ の積分範囲で正負相殺

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx$$

$$= 0$$

=

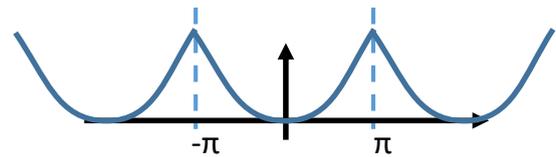
=



フーリエ級数展開の例さらに： x^2 ，周期 2π の場合

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \dots$$



書いてみよう。

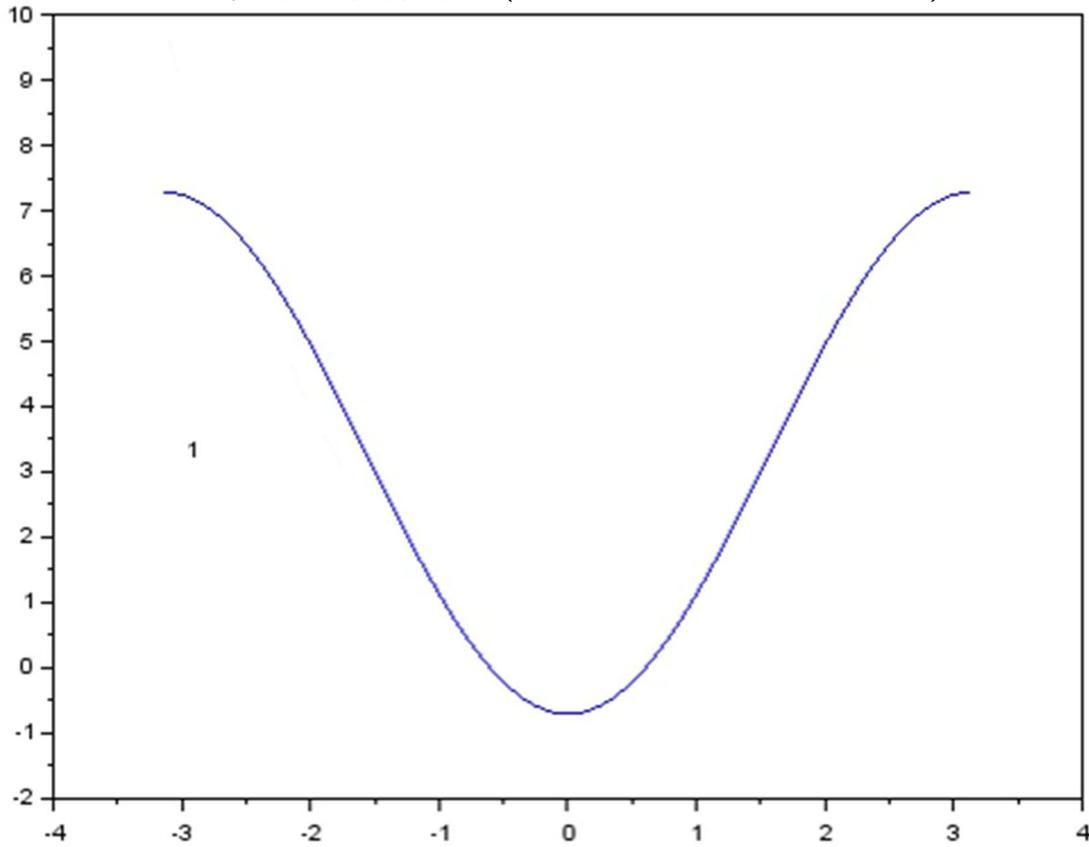
$n=0$ まで

$n=1$ まで

$n=2$ まで

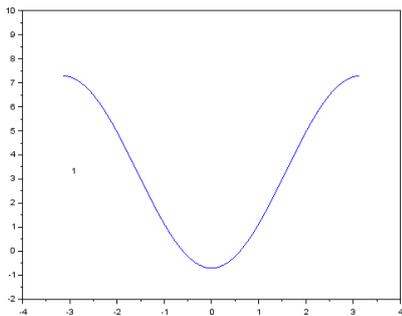


x^2 のフーリエ級数展開 (アニメーション)

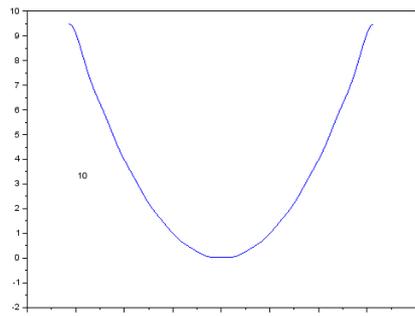


n=1から50までのシミュレート

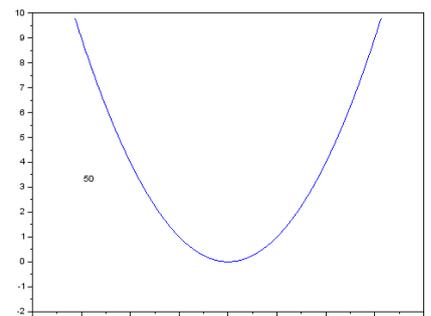
この場合はGibbs現象は生じない



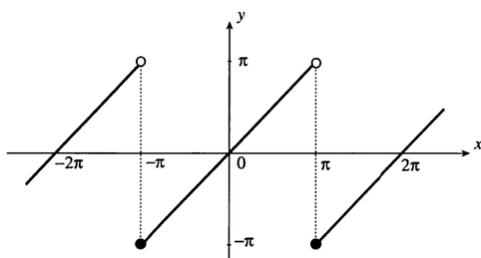
n=1まで



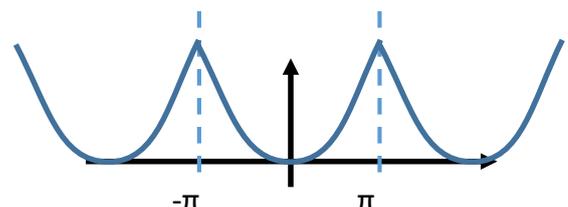
n=10まで



n=50まで



生じる

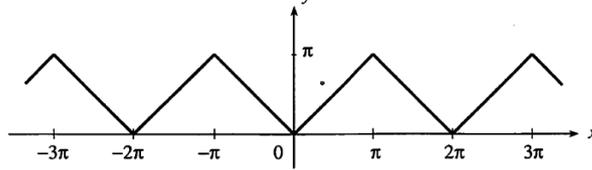


生じない

Gibbs現象は「不連続な点がある」場合に生じる。



フーリエ級数展開の例さらに：周期 2π の三角波



偶関数なのでcosの項だけ計算すれば良い。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx =$$

=

=

=

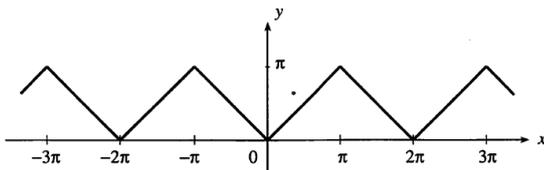
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$$

=

=



フーリエ級数展開の例さらに：周期 2π の三角波



$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right)$$

書いてみよう。

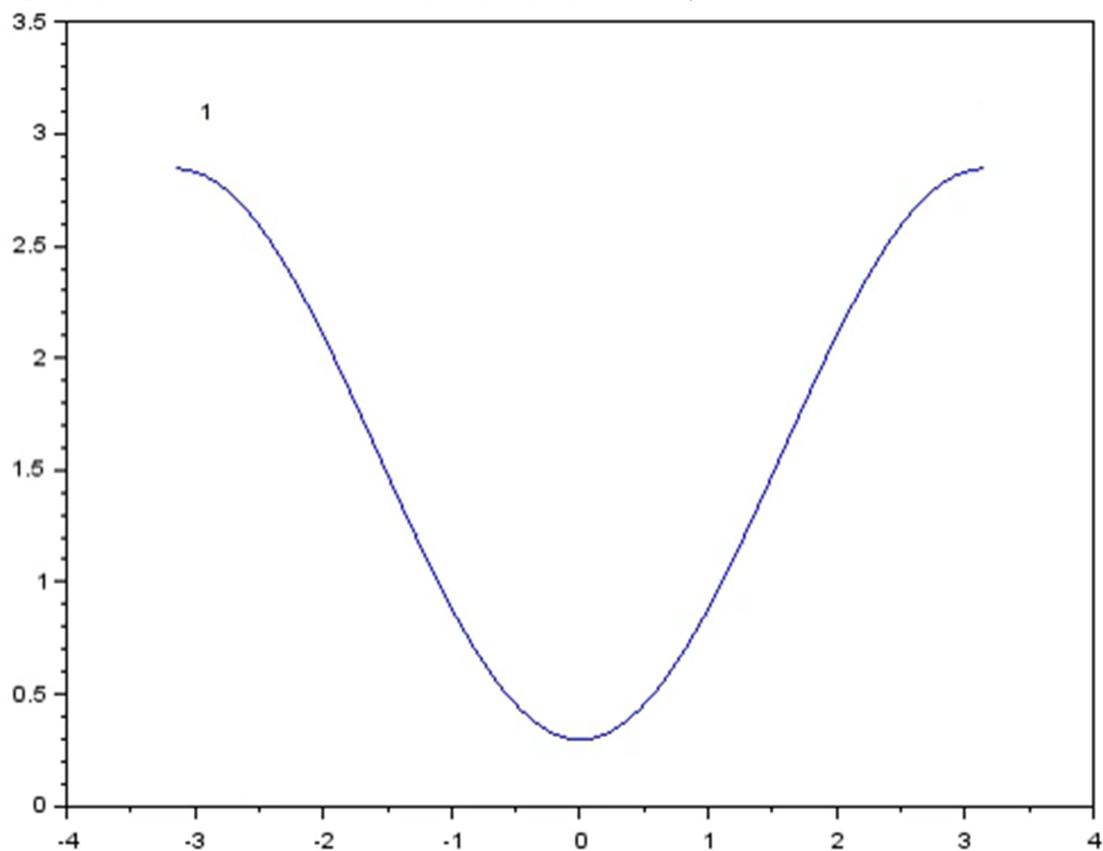
n=0まで

n=1まで

n=3まで



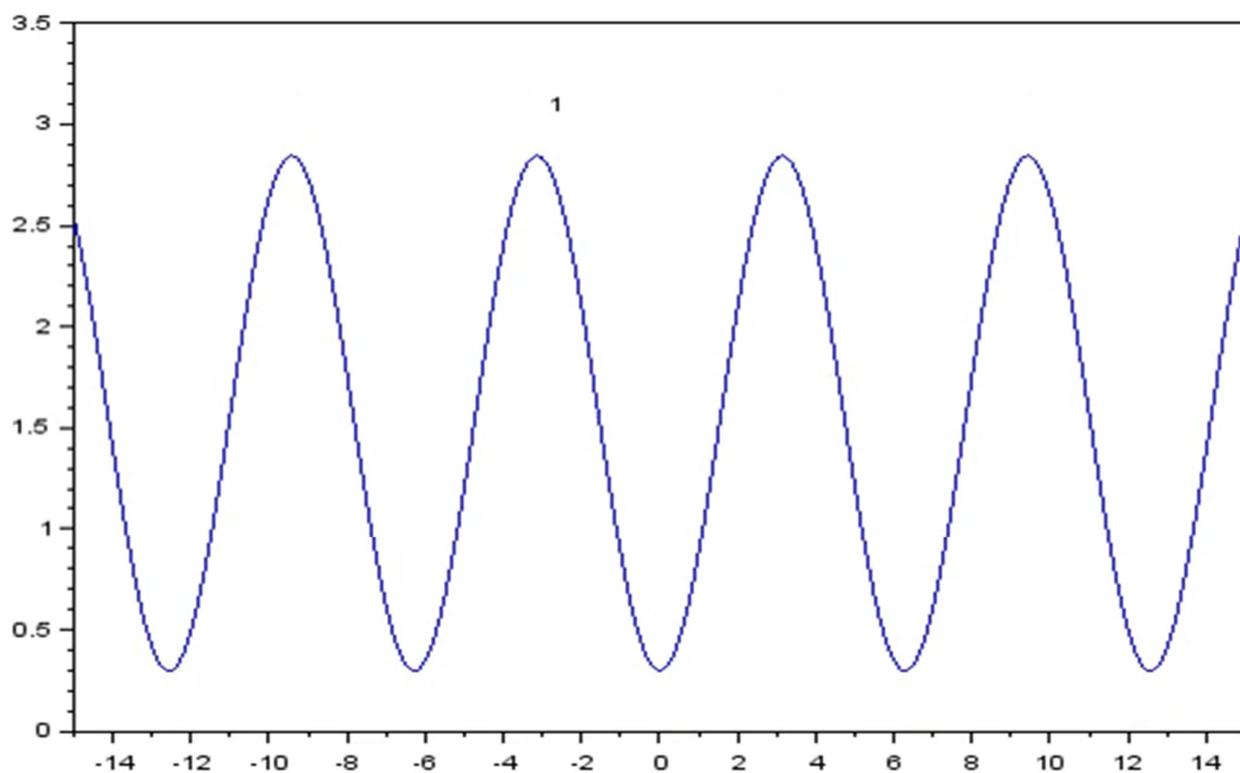
三角波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



n=1から20までのシミュレート



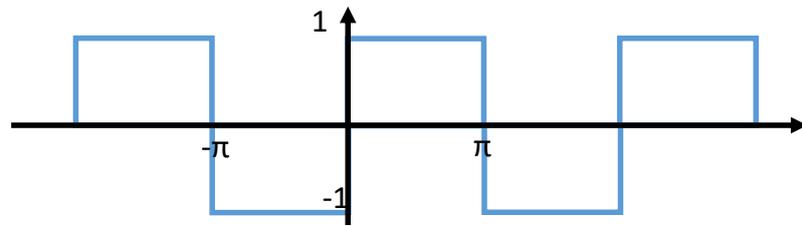
三角波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



x軸の計算範囲を広げた場合. n=1から20まで



フーリエ級数展開の例さらに：周期 2π の矩形波



奇関数なのでsinの項だけ計算すれば良い。

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx =$$

=

=



フーリエ級数展開の例さらに：周期 2π の矩形波

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right) \end{aligned}$$

書いてみよう（ここでは $4/\pi$ を無視して書いてみる）。

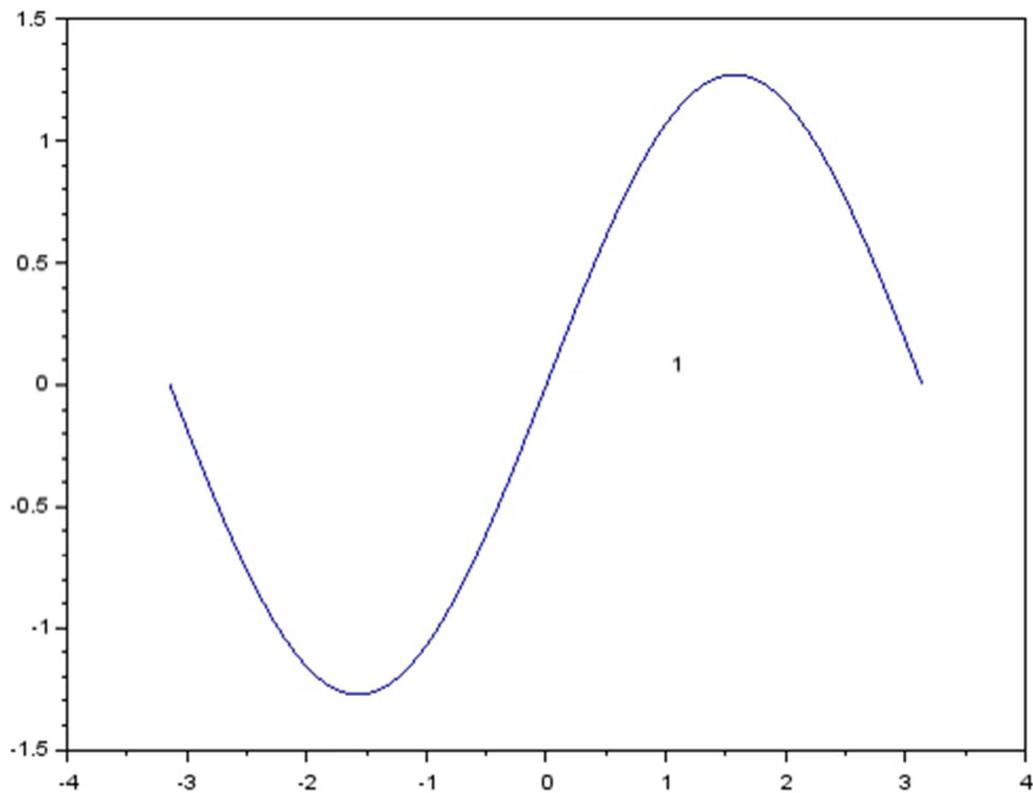
n=1まで

n=3まで

n=5まで



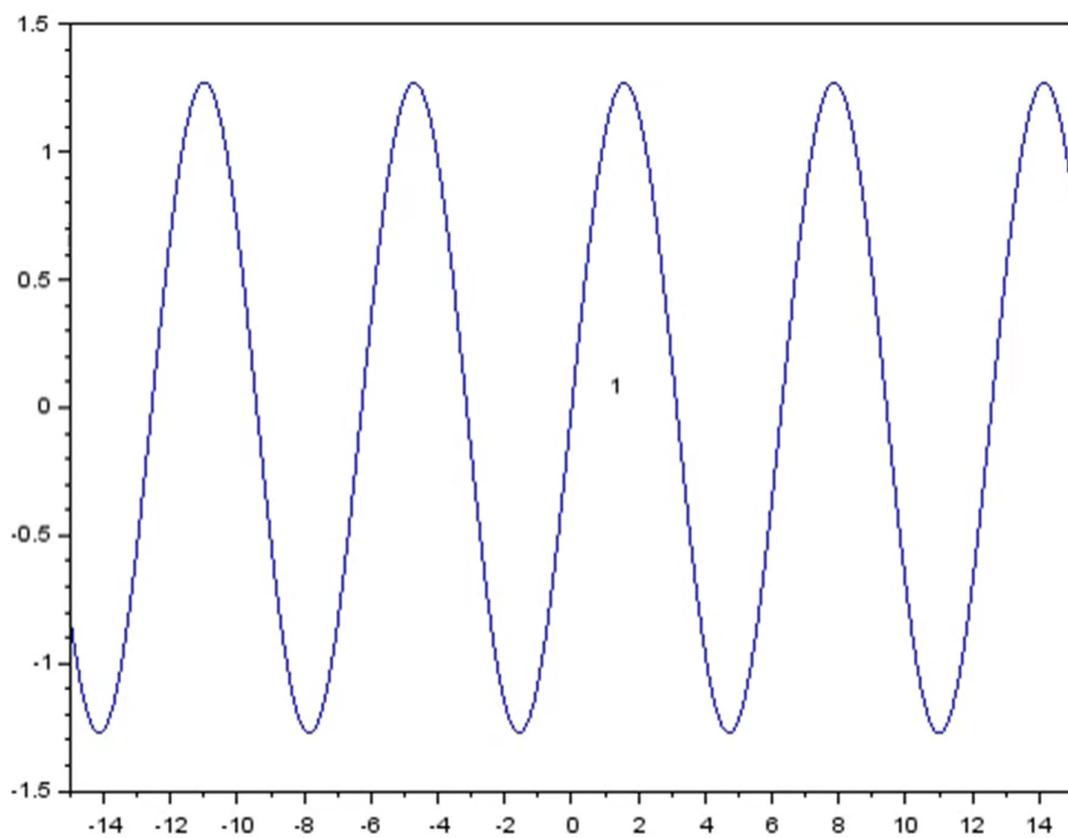
矩形波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



n=1から50までのシミュレート



矩形波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



x軸の計算範囲を広げた場合. n=1から50まで



今日のまとめ

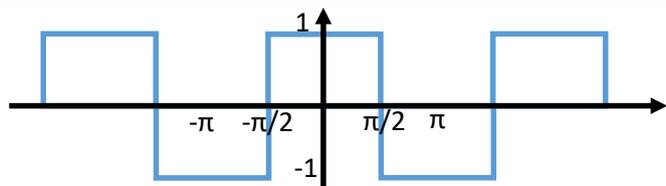
1. 関数は偶関数と奇関数の和で表せる.
2. フーリエ級数展開の \cos , \sin の項は, 偶関数, 奇関数成分を表す
3. 不連続な点のある関数は, フーリエ級数展開の際にGibbs現象を生じる
4. 自由にフーリエ級数展開をできるようになった.

次回は複素フーリエ級数展開



今日のレポート

1. 左図のような周期 2π の矩形波のフーリエ級数展開をせよ
(授業の例とは異なり偶関数)



レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内

