

応用数学第一

第四回

梶本裕之



日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/3	周期関数、フーリエ級数の定義	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	10/10
2	10/10	フーリエ級数の計算例	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	10/17
3	10/17	複素フーリエ級数、直交関数系	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	10/24
4	10/24	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	10/31
5	10/31 (オンデマンド)	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	11/7
6	11/7	フーリエ変換の性質	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	11/14
7	11/14	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	11/21
-	11/21	調布祭準備			
-	11/28	中間確認テストとその解説 (前半)	中間確認テスト用問題集	[📎 pdf](2022年版)	
-	12/5	休講日 (クォーター制との調整による)			
8	12/12	離散時間信号と離散時間フーリエ変換 (教科書外)	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	12/19
9	12/19 (オンデマンド)	離散フーリエ変換 (教科書外)	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	12/26
10	12/26	離散フーリエ変換の性質 (教科書外)	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	1/9
11	1/9	サンプリング定理	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	1/16
12	1/16	ラプラス変換の定義と性質	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	1/23
13	1/23	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[📎 pdf](2023年版)	video 📎	1/30
-	1/30	期末確認テストとその解説 (後半)	期末テスト用問題集	[📎 pdf](2022年版)	



前回のまとめ

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

1. フーリエ級数展開を拡張し、複素フーリエ級数展開を定義した.
2. 少しシンプルな形で書ける. またある周波数の振幅と位相の情報が係数に現れる.
3. 基底関数がきちんと「要素」であるために、「要素を再度分解しても別の要素になることはない」ことを確認した.
4. このようになる基底関数群を直交関数系と呼び、フーリエ級数展開も複素フーリエ級数展開も直交関数系への展開であった.



復習を兼ねて： x^2 の複素フーリエ級数展開

周期 2π , $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x^2$ となる関数を複素フーリエ級数展開.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-jnx) dx =$$

=

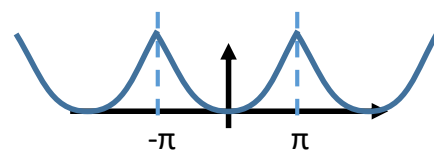
=

=

=

=

=



周期 2π で正負対称の周期関数のため

ただし $n=0$ の場合は別途計算

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx =$$

=

$$\text{よって } f(x) = x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2} \exp(jnx)$$



今日の目標

- たたみこみを理解する.
- パーセバルの等式を理解する.



信号 = 原音 + 響き (残響, 反響)



原曲: https://www.youtube.com/watch?v=AMbj_WDmWho

「元の音」に「入れ物による響き」が加わって音色となる
この効果は数学的にどのように表現できるか



信号 = 原音 + 響き (残響, 反響)

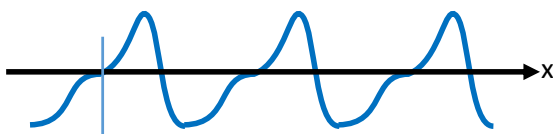


「元の音」に「入れ物による響き」が加わって音色となる
この効果は数学的にどのように表現できるか



原音と響きの定式化

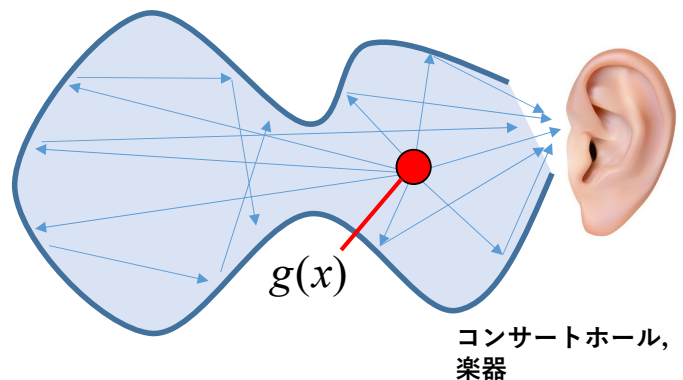
原音 $g(x)$



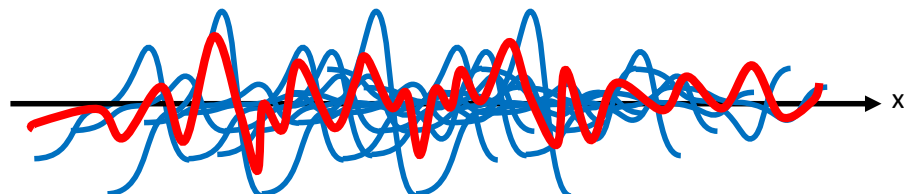
壁のある場所で反射した音



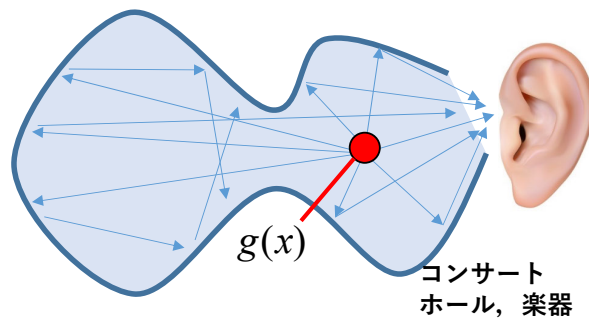
τ だけ遅れて、振幅も変化した波となる



これらがすべての壁の場所で発生し、加算される

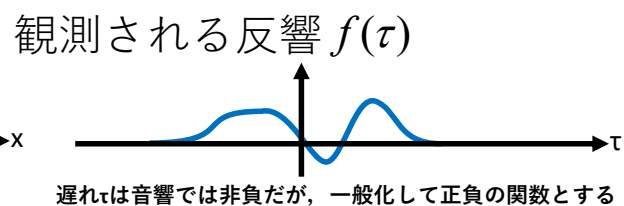
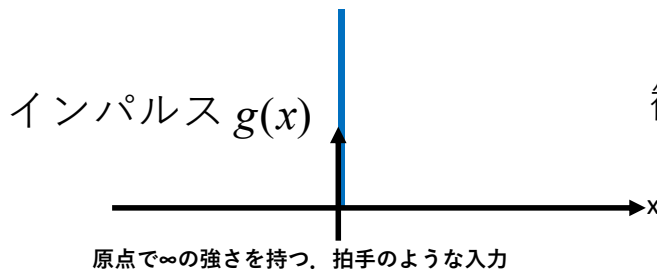


反響＝瞬間的な入力に対する応答

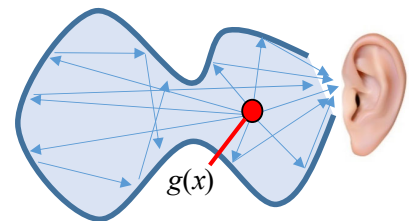
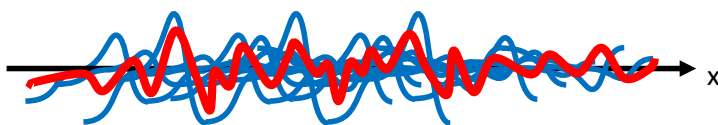


反響を表す関数は、コンサートホール、楽器等に固有の値であり、入力波形とは独立である。

直感的には「瞬間的な入力（インパルス）」に対して返ってくる波となる（インパルス関数については後日説明）

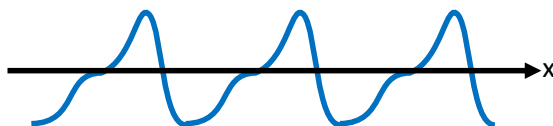


原音と響きの定式化

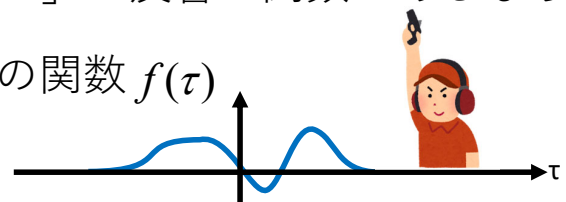


「遅れ時間 τ に対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら、

原音 $g(x)$



反響の関数 $f(\tau)$



τ だけ遅れた反響音成分は

遅れ τ に対応した反響の強さ τ だけ遅れた原信号

これらがすべての τ で発生し、加算されるから、最終的な信号は

これを関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込み積分とよぶ



たたみ込み積分

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \quad f * g(x) \text{ と表記}$$

原音の性質 $g(x)$ と、環境の性質 $f(\tau)$ で信号を決める、信号の理解には欠かせないもの。意味的には多くの場合、 τ は $-\infty \sim \infty$

ここではフーリエ級数展開の扱う範囲でたたみ込み積分の性質を理解するため、 $f(\tau)$ も $g(x)$ も同じ**周期Tの周期関数**である場合の、次のたたみ込み積分 $h(x)$ を考える（物理的実体は考えにくいが...）。

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \quad f * g(x) \text{ と表記}$$

関数 $h(x)$ も周期Tの周期関数となる。

$$h(x+T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x+T-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = h(x)$$

だから、関数 $h(x)$ もフーリエ級数展開できる。



たたみ込み積分をフーリエ級数展開

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \text{ を複素フーリエ級数展開する}$$

n次の項を e_n として

$$e_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

=

=

=

=

$z=x-\tau$ で変数変換。
周期関数の一周分積分なので積分範囲は変化しない

つまり $f(x), g(x)$ それぞれのフーリエ級数の積になっている。



たたみ込み積分のフーリエ級数展開まとめ

2つの周期関数 $f(x), g(x)$ が次のようにフーリエ級数展開され,

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

$$g(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x) \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

$f(x), g(x)$ のたたみ込み $h(x)$ が次のようにフーリエ級数展開される時,

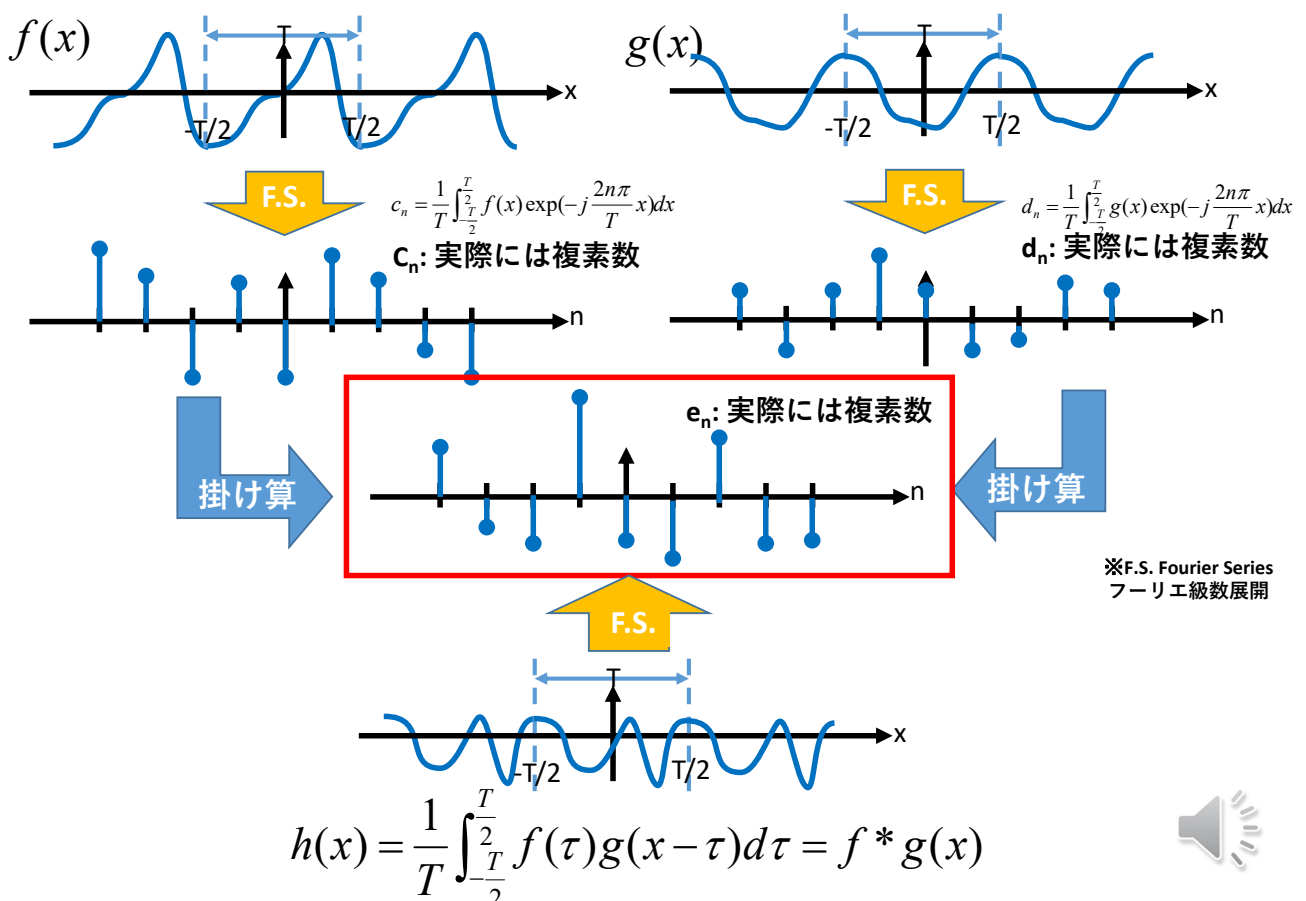
$$h(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) g(x-\tau) d\tau \quad e_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

次の式が成り立つ

つまりたたみ込み積分は、周波数領域では単なる積となる



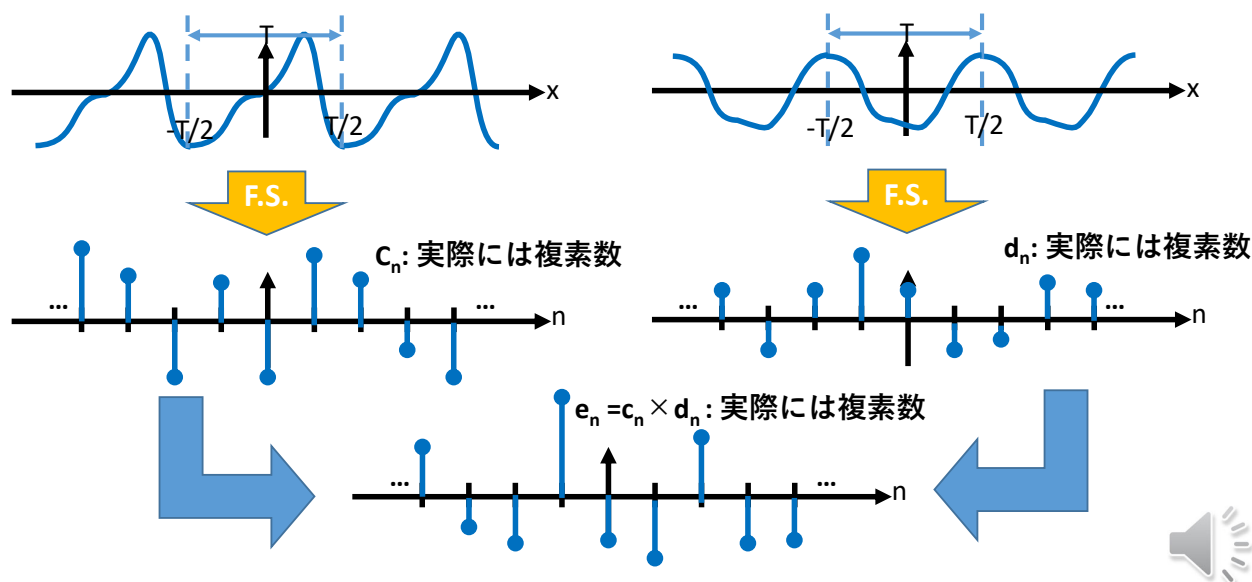
たたみ込み積分のフーリエ級数展開まとめ



逆順の計算：2つの周期関数の，周波数成分同士を掛けたら？

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x) \quad g(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$



2つの関数の，周波数成分同士を掛けたら？

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

$$c_n d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} y) dy \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(z) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} z) dz$$

=

=

=

$x=y+z$ で変数変換。 $z=x-y$
周期関数の一周分積分なので積分範囲は変化しない

これは新たな関数 $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) g(x-y) dy$ の複素フーリエ級数展開を求めているとみなせる。

たたみ込みの交換則

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau)f(x-\tau)d\tau$$

をしめしたい($c_n d_n = d_n c_n$ だから当然ではある)

$$f * g(x) =$$

=

=

=

$z=x-\tau$ で変数変換.
周期関数の一周分積分なので積分範囲は変化しない

つまりたたみ込み積分は交換則がなりたつ.



特殊な場合： $g(x)$ が $f(-x)$ の共役複素関数の場合

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

ここで, $g(x) = \overline{f(-x)}$ とおく.

$$d_n =$$

=

$y=-x$ で変数変換.

=

これは「 $f(x)$ の複素フーリエ変換」の共役とみなせる

=

$$\therefore c_n d_n =$$

=



特殊な場合： $g(x)$ が $f(-x)$ の共役複素関数の場合

$h(x)$ に関しては
$$h(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

=

この関数の複素フーリエ級数展開の係数が $c_n d_n = |c_n|^2$ だから、

$$h(x) =$$

よって、

$x=0$ を代入してみると、

$$h(0) = \quad = \quad =$$

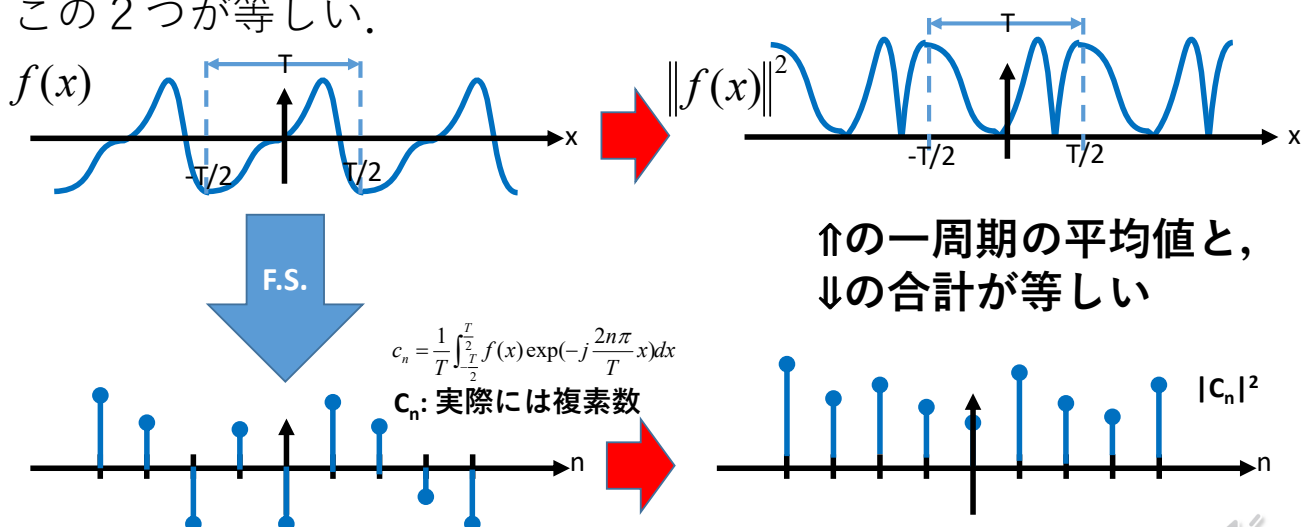


パーセバルの等式

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \|f(x)\|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n\|^2$$

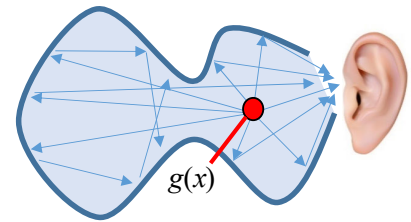
これをパーセバルの等式という。

- 左辺：元の関数の絶対値の自乗の積分（の平均）
 - 右辺：元の関数の（複素）フーリエ級数展開の係数の自乗和
- この2つが等しい。



大まかな意味：フーリエ級数展開をしてもパワーは保存（詳細はフーリエ変換で再度）

今日のまとめ



- 一般的な信号を「原音」と「環境による反響」の相互作用とみなし，たたみ込み積分を導入した．
- たたみ込み積分のフーリエ級数展開によって，周波数領域では各周波数の積にすぎないことを理解した．
- 特殊な場合を計算することでパーセバルの等式を導入し，フーリエ級数展開によって「パワー」は変化しないことを見た．

次回はフーリエ変換

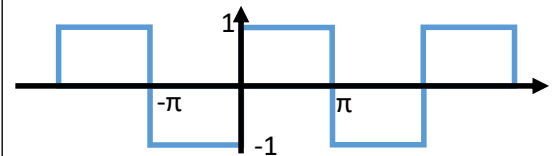


今日のレポート

(複素フーリエ級数展開の復習)

周期 2π の矩形波（右図）の複素フーリエ級数

展開が、 $c_n = j \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}$ となることを示せ



レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内

