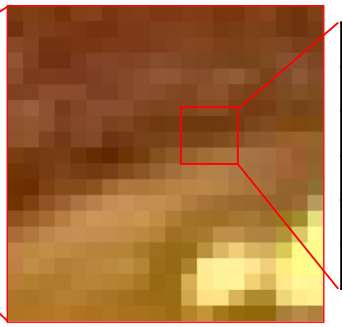
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/3	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2023年版)	video	10/10
2	10/10	フーリエ級数の計算例	[pdf](2023年版)	video	10/17
3	10/17	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2023年版)	video	10/24
4	10/24	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2023年版)	video	10/31
5	10/31（オンデマンド）	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2023年版)	video	11/7
6	11/7	フーリエ変換の性質	[pdf](2023年版)	video	11/14
7	11/14	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2023年版)	video	11/21
-	11/21	調布祭準備			
-	11/28	中間確認テストとその解説（前半）	中間確認テスト用問題集	[pdf](2022年版)	
-	12/5	休講日（クオーター制との調整による）			
8	12/12	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2023年版)	video	12/19
9	12/19（オンデマンド）	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2023年版)	video	12/26
10	12/26	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2023年版)	video	1/9
11	1/9	サンプリング定理	[pdf](2023年版)	video	1/16
12	1/16	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2023年版)	video	1/23
13	1/23	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2023年版)	video	1/30
-	1/30	期末確認テストとその解説（後半）	期末テスト用問題集	[pdf](2022年版)	

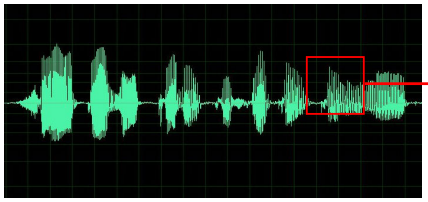
今日の目標

- 離散信号に親しむ
- 離散時間フーリエ変換の導入

現在（ほとんど）すべての信号は離散的なデータとして扱われる



10	12	16	35	53	44
34	68	43	43	57	45
57	66	12	21	22	66
55	54	15	45	45	64
67	54	32	77	83	22
66	67	21	97	75	34



23,65,67,43,22,90,32,21,55,43

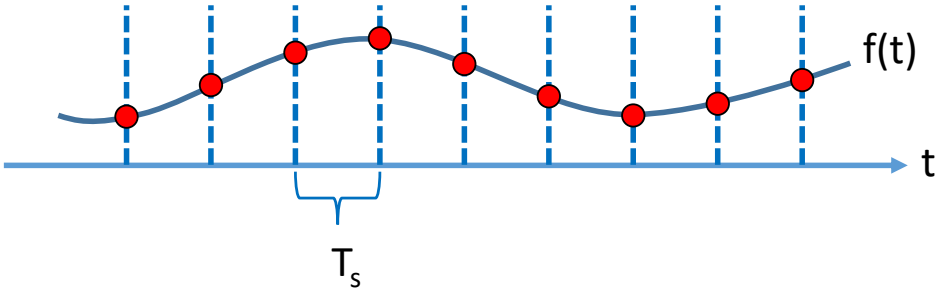
ディジタルコンピューティングの圧倒的進化による.

離散的：２つの意味.

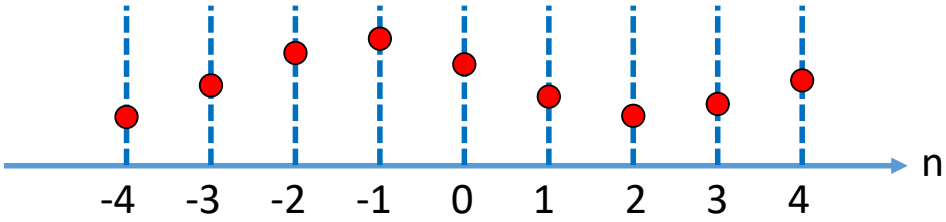
- 時間的，空間的な「サンプリング」が離散的
- データのビット数が決まっている（ex. 8bit:-128～127）

これから扱うのは特に**サンプリングが離散的な信号**.

サンプリング

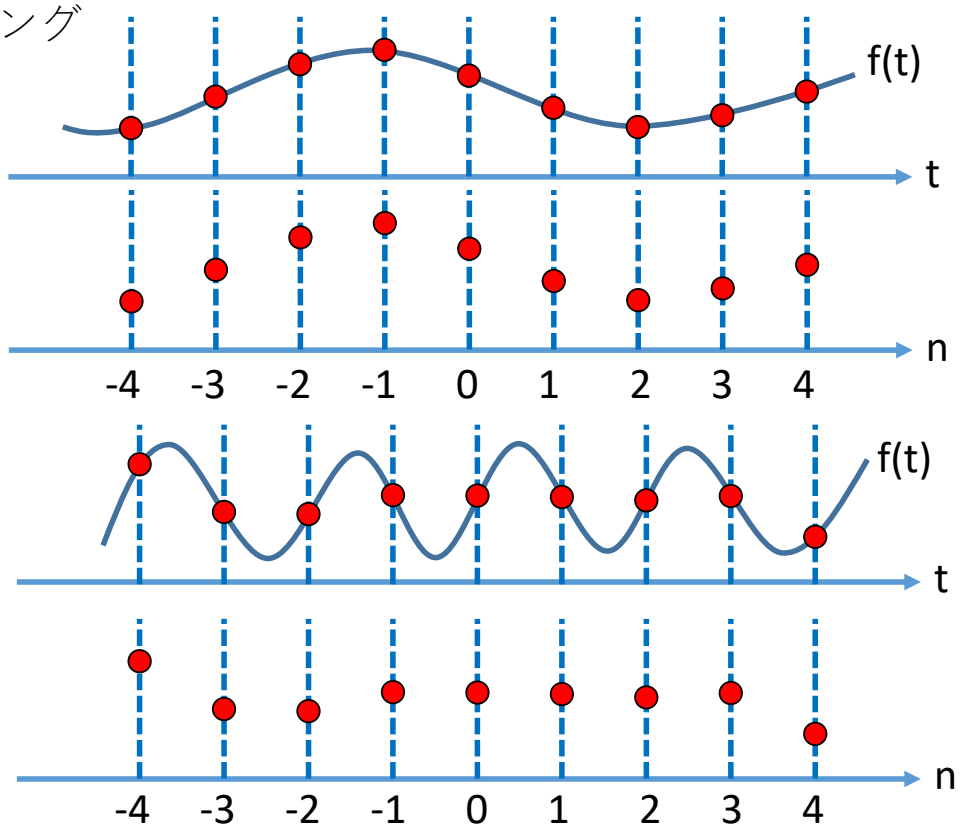


１次元データとしては時間信号が多いので今後tと表記.
一定周期T_s（サンプリング周期）で関数の値を取り出す.



$f(-2T_s)$, $f(-1T_s)$, $f(0T_s)$, $f(1T_s)$, $f(2T_s)$, を取り出す.
時間を整数に正規化し， f(-4), f(-3), …, f(3), f(4) と表記

サンプリング



サンプリングが明らかにうまく行かない場合がある．なぜか

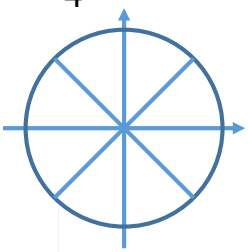
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\frac{\pi}{4}$ の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-\pi),\cos(-\frac{3\pi}{4}),\cos(-\frac{\pi}{2}),\cos(-\frac{\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{\pi}{4}),\cos(\frac{\pi}{2}),\cos(\frac{3\pi}{4}),\cos(\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

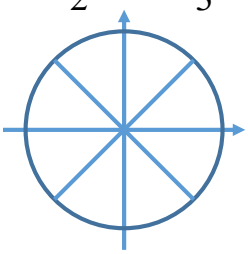
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\frac{\pi}{6}$ の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-\frac{2\pi}{3}),\cos(-\frac{\pi}{2}),\cos(-\frac{\pi}{3}),\cos(-\frac{\pi}{6}),\cos(0),\cos(\frac{\pi}{6}),\cos(\frac{\pi}{3}),\cos(\frac{\pi}{2}),\cos(\frac{2\pi}{3}),.$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

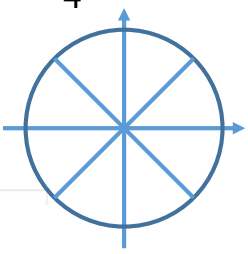
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\frac{3\pi}{4}$の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-3\pi),\cos(-\frac{9\pi}{4}),\cos(-\frac{3\pi}{2}),\cos(-\frac{3\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{3\pi}{4}),\cos(\frac{3\pi}{2}),\cos(\frac{9\pi}{4}),\cos(3\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

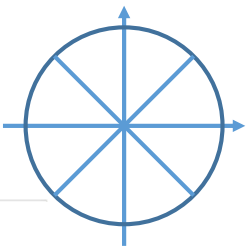
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\pi$ の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-4\pi),\cos(-3\pi),\cos(-2\pi),\cos(-\pi),\cos(0),\cos(\pi),\cos(2\pi),\cos(3\pi),\cos(4\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

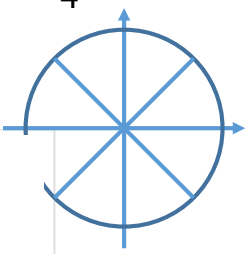
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\frac{5\pi}{4}$の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-5\pi),\cos(-\frac{15\pi}{4}),\cos(-\frac{5\pi}{2}),\cos(-\frac{5\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{5\pi}{4}),\cos(\frac{5\pi}{2}),\cos(\frac{15\pi}{4}),\cos(5\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

元の波形は異なるにも関わらず，サンプリングデータは$\omega=\frac{3\pi}{4}$の時と等しい

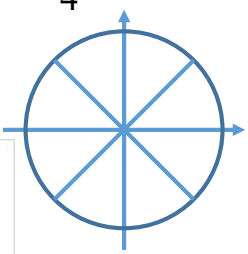
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\frac{11\pi}{4}$の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-11\pi),\cos(-\frac{33\pi}{4}),\cos(-\frac{11\pi}{2}),\cos(-\frac{11\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{11\pi}{4}),\cos(\frac{11\pi}{2}),\cos(\frac{33\pi}{4}),\cos(11\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$

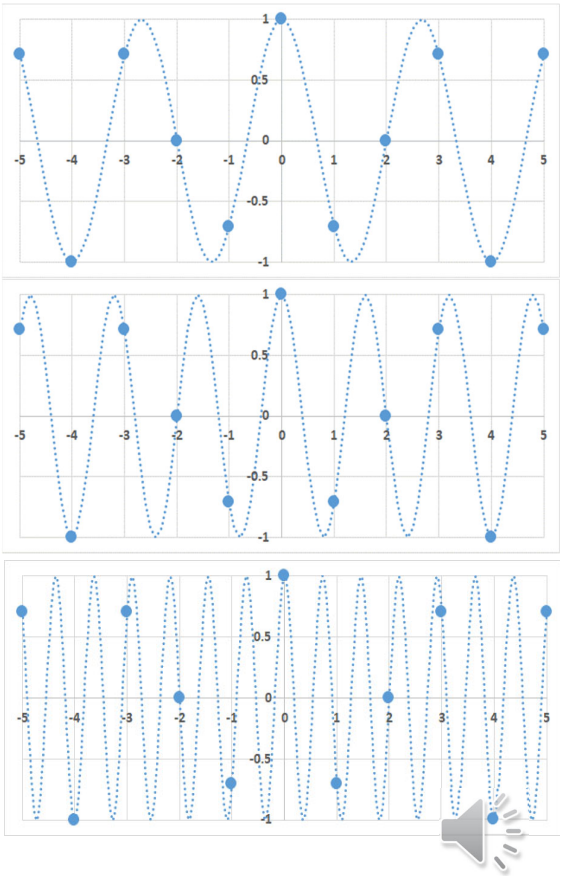


元の波形は異なるにも関わらず，サンプリングデータは$\omega=\frac{3\pi}{4}$の時と等しい

$f(n)=\cos(\omega n)$のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$\omega=\frac{3\pi}{4}$　$\omega=\frac{5\pi}{4}$　$\omega=\frac{11\pi}{4}$

は，すべて同じサンプリング結果.



理由：

$f(n)=\cos(\frac{3\pi}{4}n)$

$=$　　$=$

$=$

$=$

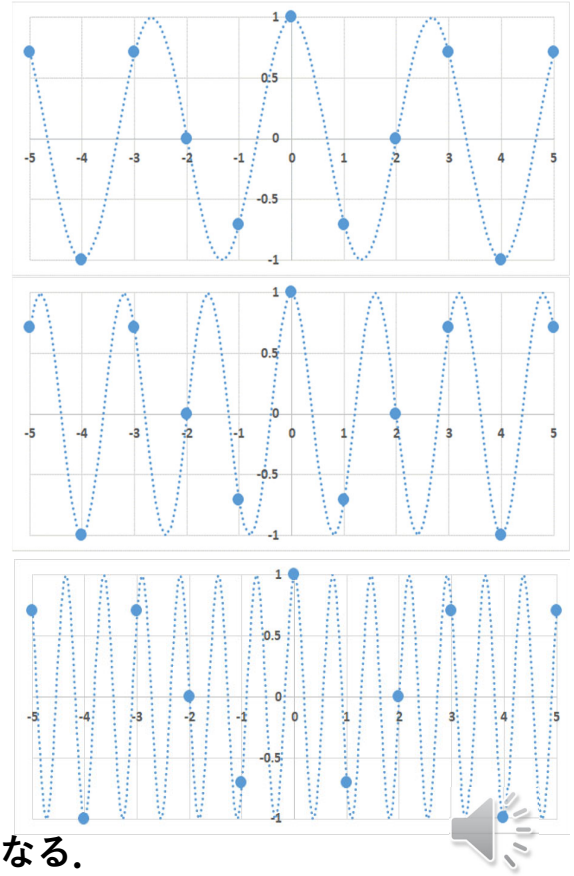
$=$

サンプリング：元の関数が周期関数の場合

一般に周波数ωをもつ波形（cos, sin,exp）は

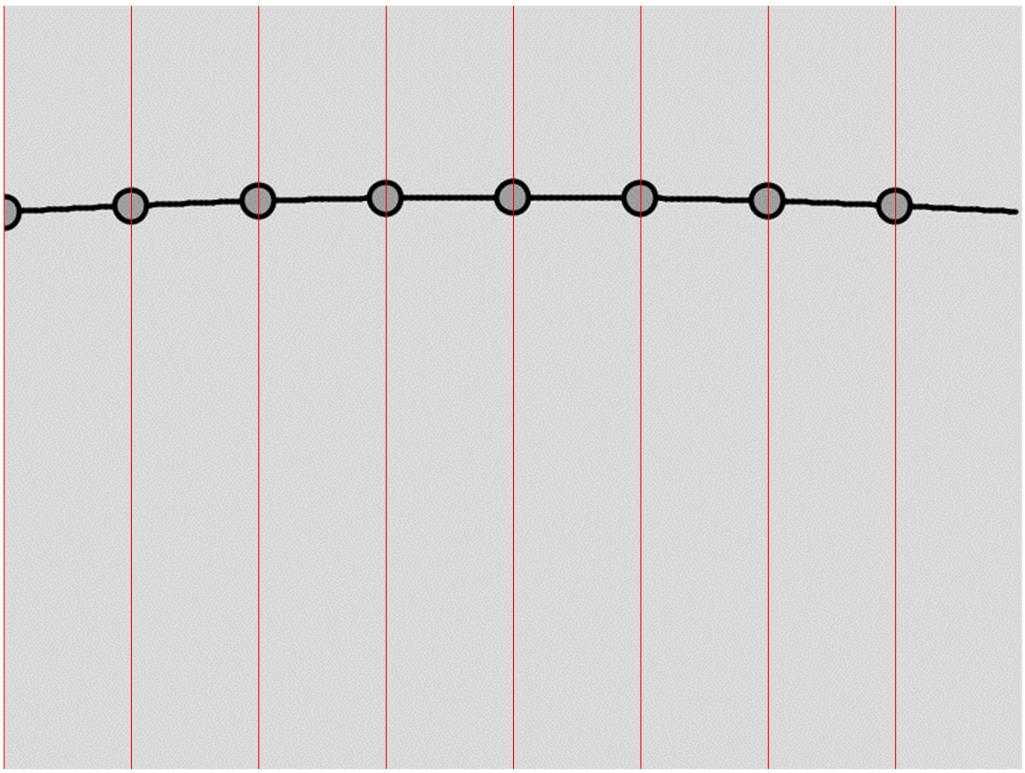
$$f(n)=\begin{cases}\cos(\omega n)\\ \sin(\omega n)\\ \exp(-j\omega n)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\\ \\ \\ \end{cases}$$



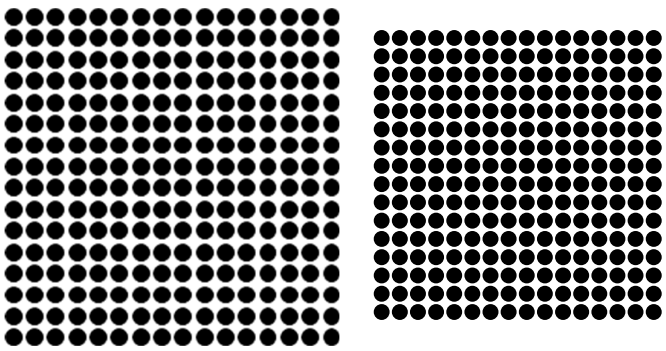
つまり周波数成分は2π周期の繰り返し波形となる.

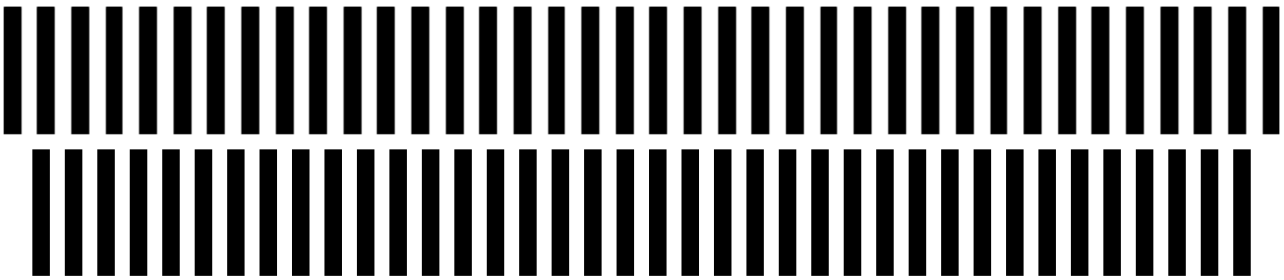
動画



元の波形が正弦波の場合，サンプリングされたデータも正弦波となる
ただし元の波形の周波数が高い場合，サンプリングデータの周波数は元の周波数と一致しない.

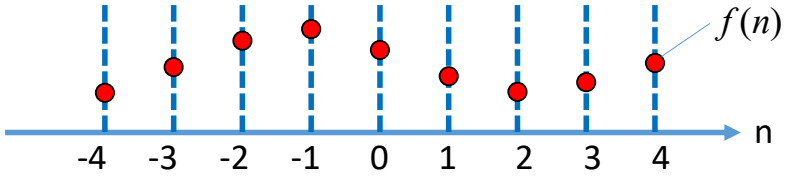
参考：モアレ（モワレ，moire）現象





少し空間周波数の異なる縞同士を重ねると，本来とは異なる周波数が出現する
モアレ（モワレ，moire）とよぶ.
縞の隙間から離散的に観察するので，サンプリングと同義であり，このために生じる現象.

サンプリングデータに対するフーリエ変換



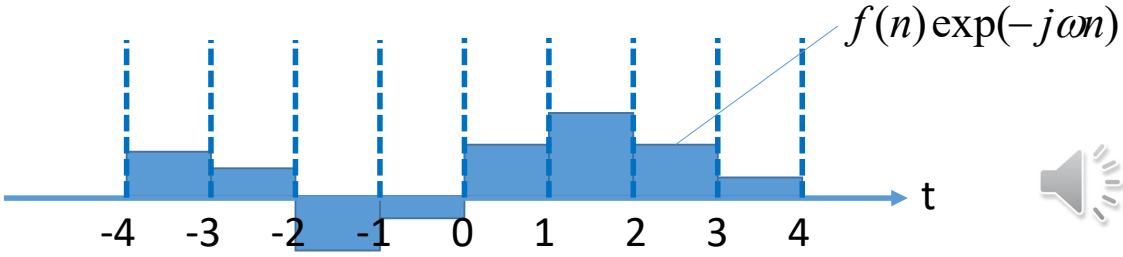
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

今，f(x)は離散的な場所でしか値を持たず，積分出来ない．

そこで近似的に，$f(x)\exp(-j\omega x)$ がn<x<n+1の間一定値として，

$$F(\omega)\approx\cdots+f(-2)\exp(-j\omega(-2))+f(-1)\exp(-j\omega(-1))$$
$$+f(0)\exp(-j\omega(0))+f(1)\exp(-j\omega(1))+f(2)\exp(-j\omega(2))+\cdots$$

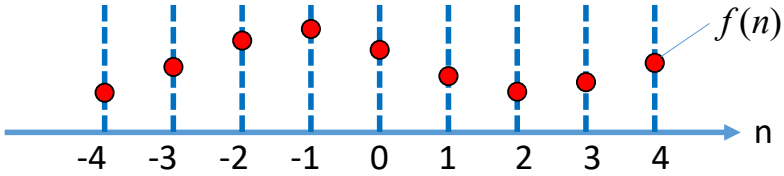
=



離散時間フーリエ変換(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)

離散信号f(n)に対して，

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

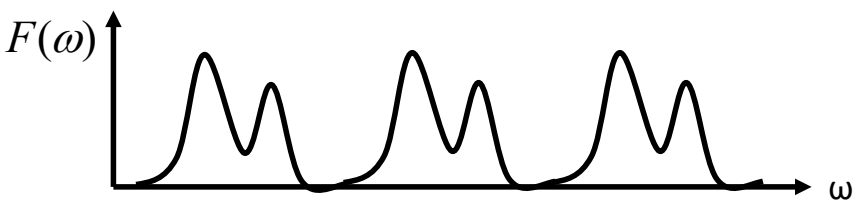


を離散時間フーリエ変換(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)とよぶ．

連続性：$F(\omega)$ はωの連続な関数である．

周期性：$F(\omega)$ はωの周期的な関数であり，その基本周期は2πである．

$\because F(\omega+2\pi)=$ =

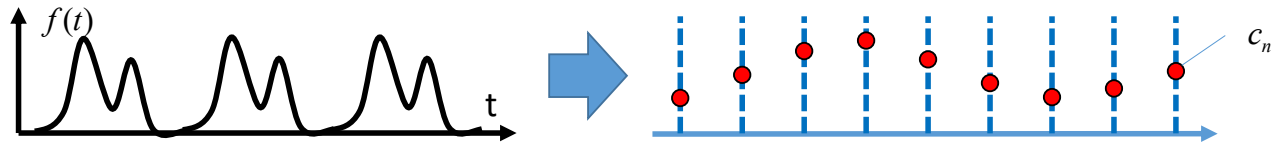


離散時間フーリエ変換とフーリエ級数展開の対応関係

フーリエ級数展開：

連続かつ周期的な時空間信号を，離散的な周波数信号（フーリエ級数）に変換.

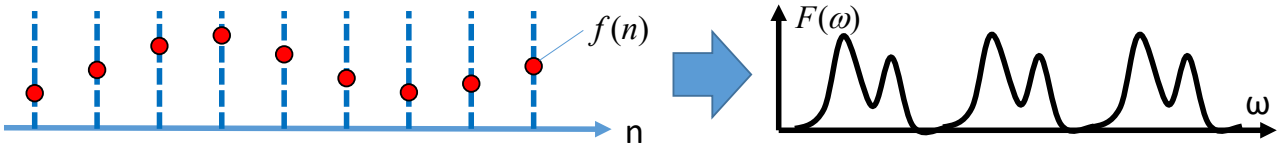
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$



離散時間フーリエ変換：

離散的な時空間信号を，連続かつ周期的な周波数信号に変換.

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$



離散時間フーリエ変換はフーリエ級数展開と逆の関係

逆DTFT

フーリエ級数展開：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

離散時間フーリエ変換：

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

フーリエ級数展開との類推から，

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

となると予想される.

逆DTFT

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega =$$

$$=$$

n≠mのとき $\int_{-\pi}^{\pi}\exp(j\omega(n-m))d\omega =$

$$= \qquad = 0$$

n=mのとき $\int_{-\pi}^{\pi}\exp(j\omega(n-m))d\omega =$

よって $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega =$

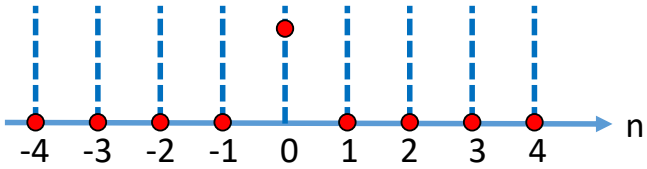
逆DTFTが示された

DTFTの例(1)：δ(n)

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

離散信号のデルタ関数を考える。

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

=

=

=

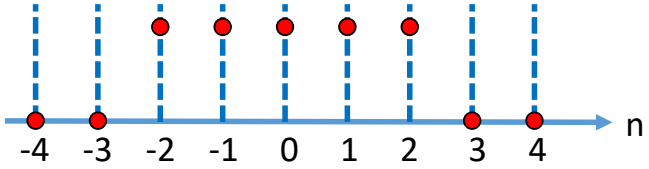
つまりDTFTにおいてもδ関数の変換は1となる。
これも周期2πの周期関数となっている。

DTFTの例(2)：矩形関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

離散信号の矩形関数を考える。

$$rect(n)=\begin{cases}1 & -N\le n\le N\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\exp(-j\omega n)$$

=

=

=

=

つまりDTFTにおいてはsinc関数「のような」関数になる。
やはり周期2πの周期関数である。

DTFTの基本的性質（１）線形性

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n) \xrightarrow{F.T} F(\omega)$
$g(n) \xrightarrow{F.T} G(\omega)$
のとき,

$$af(n)+bg(n) \xrightarrow{F.T} aF(\omega)+bG(\omega)$$

DTFTには重ね合わせが成立する

DTFTの基本的性質（２）実関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)$ が実関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}$$

$$\mathrm{Re}(F(\omega))= \qquad = \qquad =$$

$$\mathrm{Im}(F(\omega))= \qquad = \qquad =$$

よって$F(\omega)$の実部は偶関数，虚部は奇関数となる.

また$|F(\omega)|$は偶関数, $\angle F(\omega)$ は奇関数となる（証明省略）.

DTFTの基本的性質（３）偶奇関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)$ が偶関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}=$$

よって$F(\omega)$は偶関数となる.

もし$f(n)$ が実偶関数なら，$F(\omega)$ は実偶関数になる（証明省略）.

$f(n)$ が実奇関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}=$$

よって$F(\omega)$は純虚関数となる.

DTFTの基本的性質（４）時間推移と時間反転

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

Mだけ時間のずれた $f(n-M)$ のDTFT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-M)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

時間の反転した $f(-n)$ のDTFT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

DTFTの基本的性質（５）周波数シフト

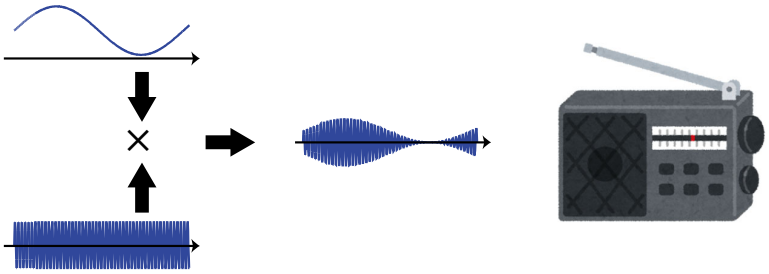
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)\exp(j\omega_0 n)$ のDTFTは？

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(j\omega_0 n)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

よって**元関数にexp(jω$_0$t)をかける操作によって周波数をずらせる（AM変調）**



DTFTの基本的性質（６）パーセバルの等式

２つの関数f(n),g(n)に対してDTFTが計算されるとき

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$$G(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\exp(-j\omega n) \qquad g(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega =$$

=

=

f(n),g(n)が等しい時,　　=

よって**DTFTにおいてもパーセバルの等式が成り立ち，DTFTにおいて「エネルギー」は保存される**

今日のまとめ

- 離散信号に親しんだ
- 離散時間フーリエ変換を導入し，その性質を確認した.

次回は**離散**フーリエ変換（離散**時間**フーリエ変換とは異なる）

今日のレポート

$a^n u(n)$ のDTFTが$\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ となることを示し、
これが周期2πの周期関数であることを示せ。

ただし$|a| < 1$とし、 $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ とする

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内