

インタラクティブシステム論 第9回

梶本裕之



日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video
1	4/8	イントロダクション(出張のためオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2023年版	video
		Scilab課題	[pdf](更新なし)	
		上記資料のPython版	[pdf](更新なし)	
2	4/15	フーリエ変換	[pdf] 2023年版	video
3	4/22	フーリエ変換と線形システム	[pdf] 2023年版	video
4	5/13	信号処理の基礎(出張のためオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2023年版	video
5	5/20	信号処理の応用1(相關)	[pdf] 2023年版	video
6	5/27	信号処理の応用2(画像処理)	[pdf] 2023年版	video
-	6/3	中間確認テストとその解説	[pdf]	
7	6/10	ラプラス変換(出張のためオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2023年版	video
8	6/17	古典制御の基礎	[pdf] 2023年版	video
9	6/24	行列	[pdf] 2023年版	video
10	7/1	行列と最小二乗法(出張のためオンライン・オンデマンド)	[pdf] 2023年版	video
11	7/8	ロボティクス	[pdf] 2023年版	video
-	7/15	期末テスト準備(自習)	[pdf] 2022年版	
-	7/22	期末確認テストとその解説		

日程およびテスト
を大学で行うかにつ
いては、随時ア
ナウンスします。
Google
Classroomでもア
ナウンスの予定。



行列



行列．．． 1， 2年でやったはず

今日の内容

- 固有値とは, 固有ベクトルとは
- 行列の対角化: **なにをしたことになるか, なぜうれしいのか**
- 情報理論・制御における行列の応用事例

キーワードは,
固有値, 固有ベクトル, 対角化



行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(例1)

y:観測データ, A:システムの性質, x:媒介変数

(例2)

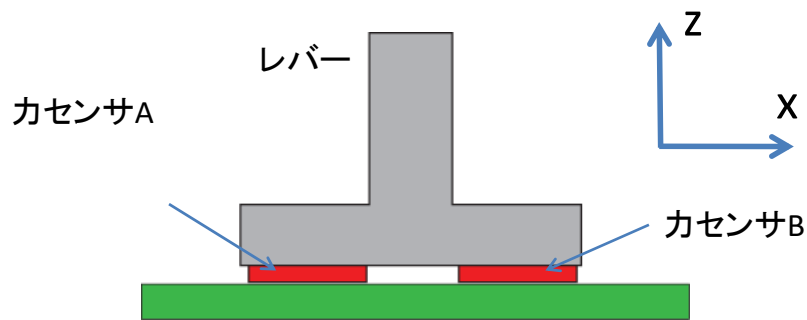
y:フーリエ空間での周波数成分, A:フーリエ変換行列,
x:実空間でのデータ系列



(例) 2軸力センサ



(例) 2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$

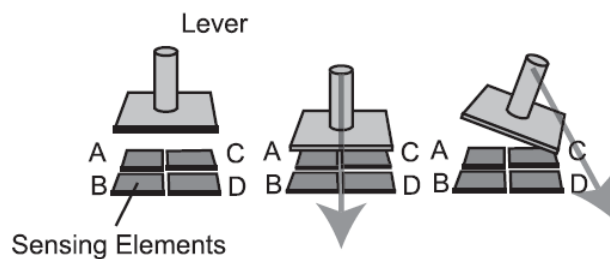
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\text{2x1ベクトル} \left\{ \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \right\} \text{2x1ベクトル}$$

2x2行列



(例) 多軸力センサ



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

$$F_Y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\text{3} \left\{ \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} \right\} \text{4}$$

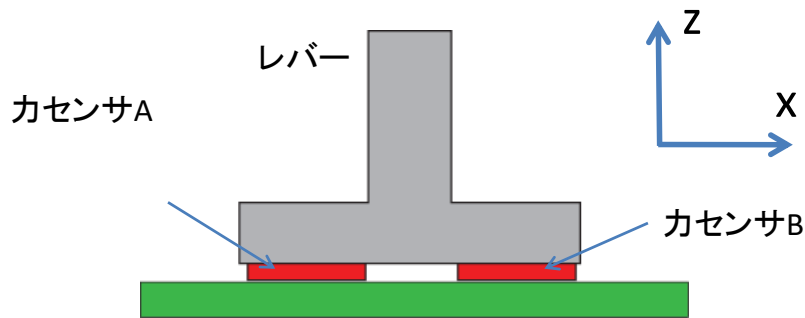
3x4行列

一般には正方行列ではない！！

(例) 6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



カセンサのキャリブレーション（校正）



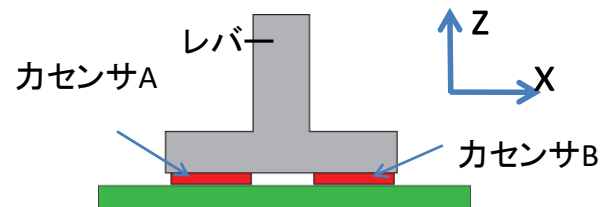
$$\begin{aligned} F_Z &= k_1 x_A + k_2 x_B \\ F_X &= k_3 x_A + k_4 x_B \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない！！



逆行列

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$



これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

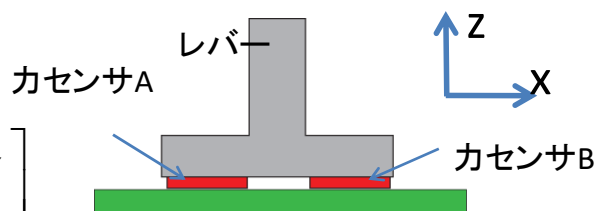
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(1) $F_Z=1, F_X=0$ の力を加え, 各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

各センサの出力に, 逆行列の成分 g_1, g_3 が現れる!

(2) $F_Z=0, F_X=1$ の力を加え, 各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

各センサの出力に, 逆行列の成分 g_2, g_4 が現れる!



逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}$ の成分, $g_1 \sim g_4$ が得られたので,
その逆行列を計算すれば $\mathbf{A}$ が得られる.

$$\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$$

まとめると,

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当



単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\text{1回目の入力}}{f_{z1}} \\ \underset{\text{2回目の入力}}{f_{x1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\text{1回目の出力}}{m_1} \\ \underset{\text{2回目の出力}}{m_2} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$



1. 2回**既知**の力ベクトルを加えて、各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列 $\mathbf{F}$,
センサ出力を並べたものを行列 $\mathbf{M}$ とする
3. 力行列の逆行列 $\mathbf{F}^{-1}$ を $\mathbf{M}$ にかければ、行列 $\mathbf{G}$ が得られる。
4. $\mathbf{G}$ の逆行列が望んだ「較正行列」 $\mathbf{A}$

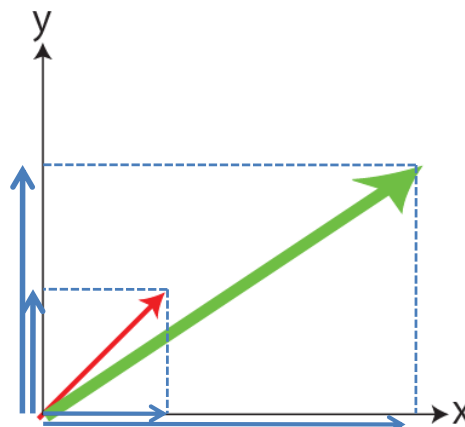


ほとんどすべての行列は、
ベクトルを「引き延ばす」ものである (1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ の時,}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} =$$

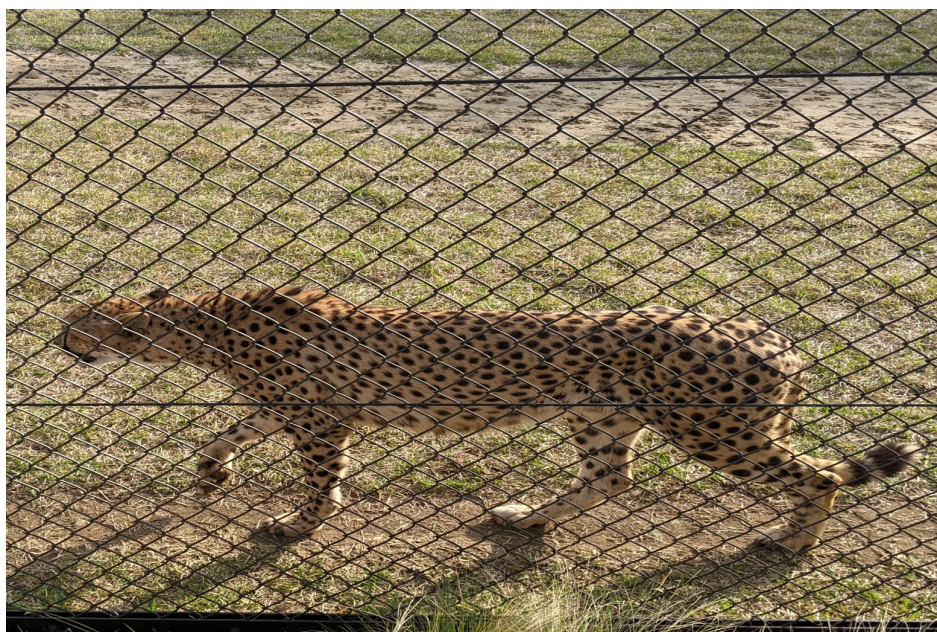


(作用)x軸成分を3倍, y軸成分を2倍に引き延ばす



ほとんどすべての行列は、
ベクトルを「引き延ばす」ものである（１）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす



ほとんどすべての行列は、
ベクトルを「引き延ばす」ものである（２）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ は、x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす}$$

では、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ の時は？．．．．よく分からない．}$$

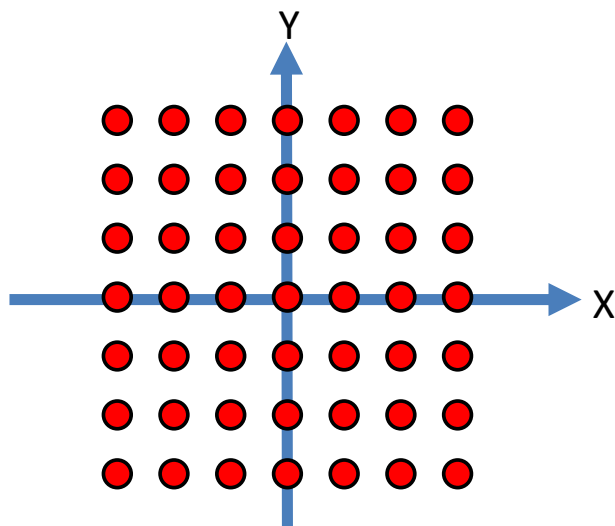


試してみる

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

で, 平面上の点群はどう移動するか

X=-3~3, Y=-3~3の点群で検証



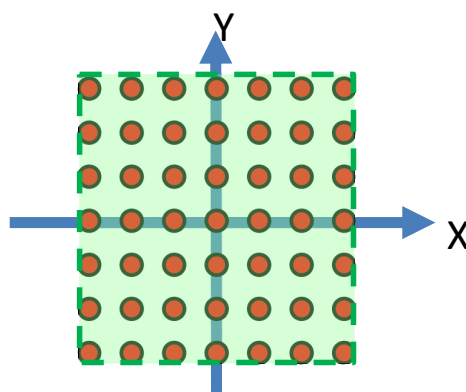
Scilabコード

```
A=[8,-2;3,1];
s=[];
t=[];
for x=-3:3
    for y=-3:3
        r=A*[x;y];
        s=[s,r(1)]; //x座標格納
        t=[t,r(2)]; //y座標格納
    end
end
plot(s,t,'o');
```

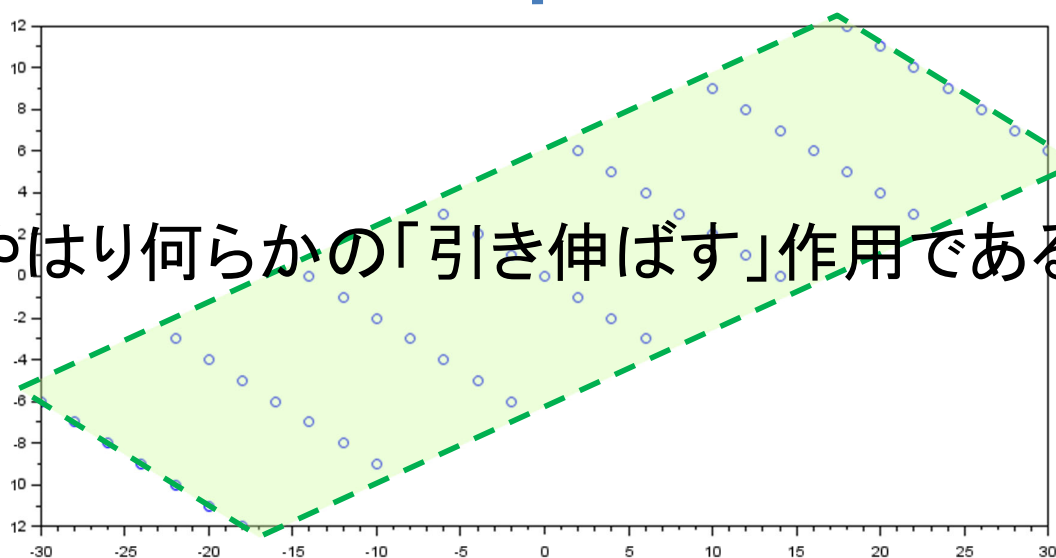


試してみる

変換前

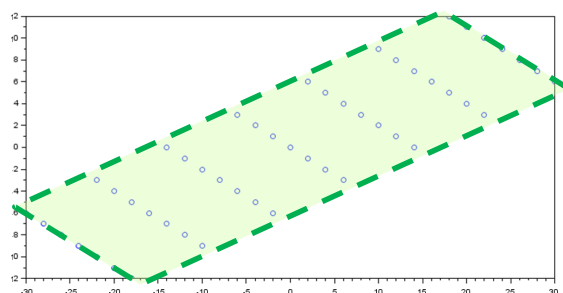


変換後



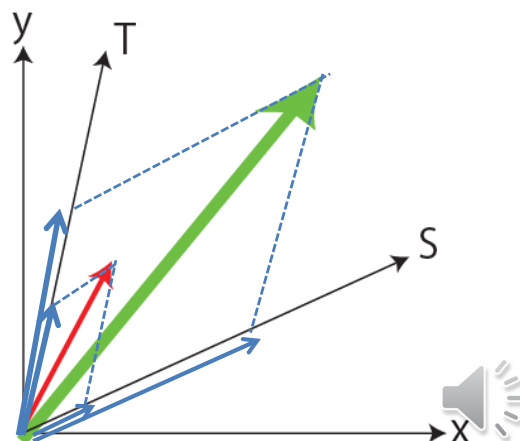
ほとんどすべての行列は、
ベクトルを「引き延ばす」ものである（２）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{の作用は}$$



- 謎のS軸成分をs倍,
- 謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことである

ただしもはや、
このS,T軸は直交していない。



固有ベクトルと固有値

固有ベクトル, 固有値とは,
謎のS, T軸, およびs,t倍
のことである。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(求める手続き)

(1) λ 倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)u_x + bu_y = 0 \longrightarrow u_y = -(a-\lambda)u_x / b$$

$$cu_x + (d-\lambda)u_y = 0$$

$$cu_x - (d-\lambda)(a-\lambda)u_x / b = 0$$

$$((a-\lambda)(d-\lambda) - bc)u_x = 0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

この解 λ_1, λ_2 を固有値と呼び、
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ。



固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -2 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば, $k = 1/\sqrt{10}$

$\lambda_2 = 7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-7 & -2 \\ 3 & 1-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば, $k = 1/\sqrt{5}$

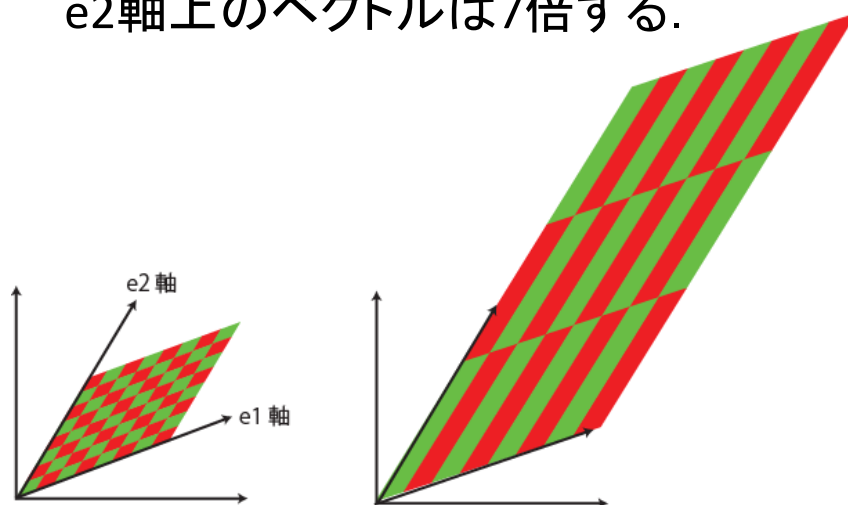
作用: e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.



固有ベクトルと固有値

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

作用: e_1 軸上のベクトルは2倍,
 e_2 軸上のベクトルは7倍する.



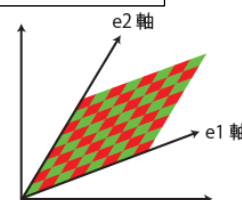
- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは, 固有値倍される



行列と座標変換

- 引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは, 固有値倍される

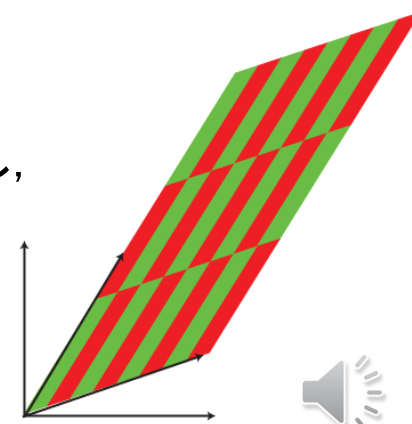
わかりにくい...



行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

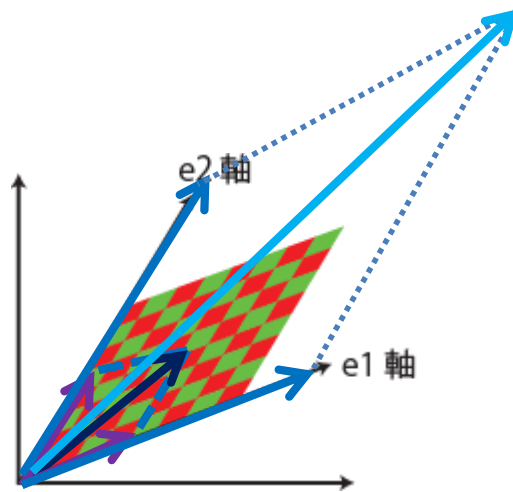
ように分解すればわかりやすいはず??



まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻る



(3) 合成して元に戻る操作, から考える

行列の作用を,

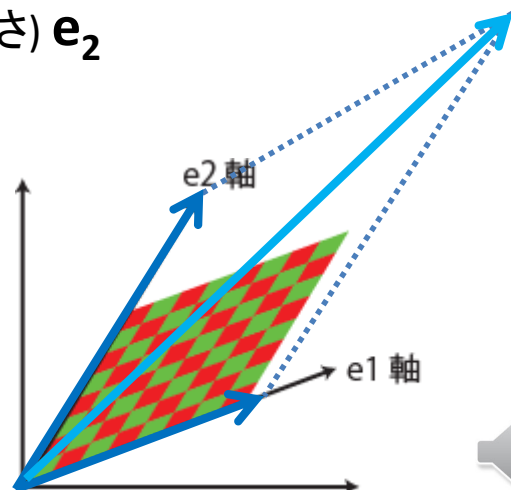
- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻る

この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない
(e_1 成分の大きさ) e_1 + (e_2 成分の大きさ) e_2

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \text{軸成分} \\ e_2 \text{軸成分} \end{bmatrix}$$

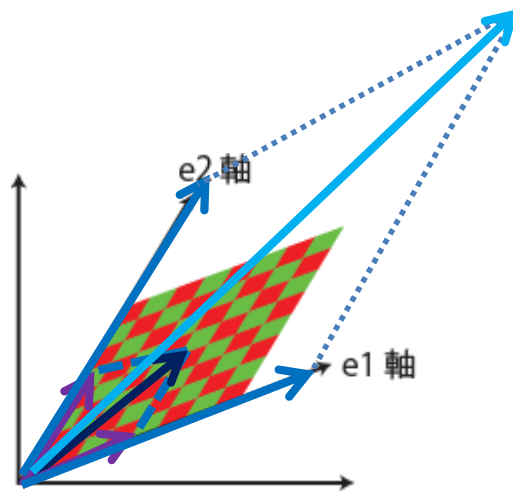
$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \text{ において}$$

$$= P \begin{bmatrix} e_1 \text{軸成分} \\ e_2 \text{軸成分} \end{bmatrix}$$



行列Tの作用は次の3段階に分解できる.

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す



(1) 引き延ばし軸での成分表示

行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

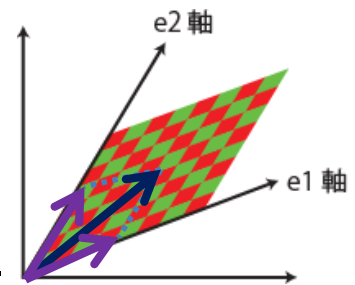
(3)「合成」が,

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \text{ 軸成分} \\ \mathbf{e}_2 \text{ 軸成分} \end{bmatrix}$$

で出来るのだから, (1)はその逆のはず.
すなわち

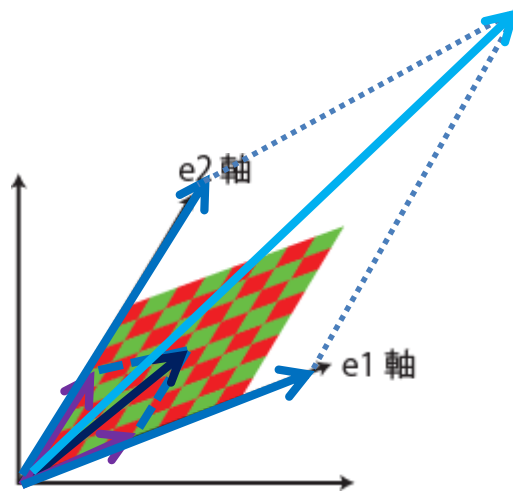
$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x \text{ 軸成分} \\ y \text{ 軸成分} \end{bmatrix}$$

により引き延ばし軸での成分表示ができる



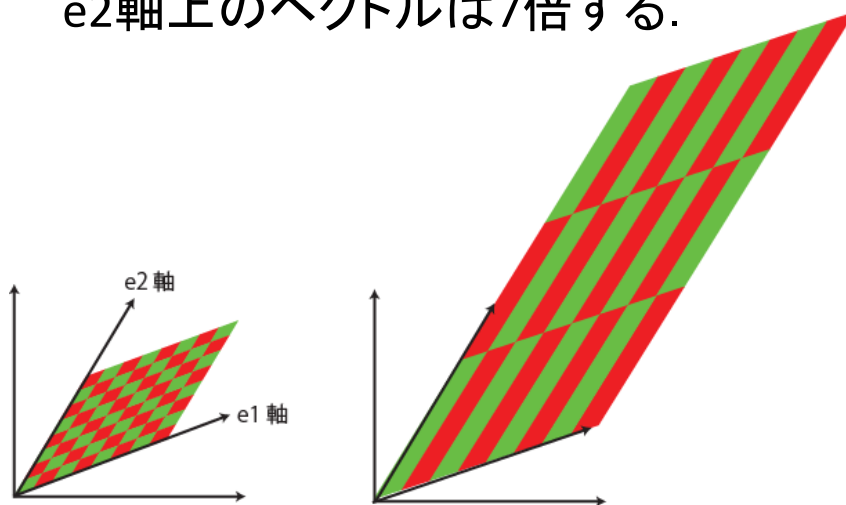
行列Tの作用は次の3段階に分解できる.

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す



(再) 固有ベクトルと固有値 $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.



- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルが, 固有値倍される



(2) 引き延ばし軸での引き延ばし

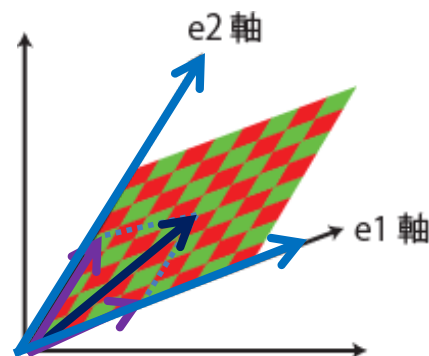
行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

各成分を

固有ベクトル $\mathbf{e}_1$ 軸に沿って固有値 λ_1 倍,
固有ベクトル $\mathbf{e}_2$ 軸に沿って固有値 λ_2 倍する.

この操作は,



$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \text{ 軸成分を } \lambda_1 \text{ 倍} \\ \mathbf{e}_2 \text{ 軸成分を } \lambda_2 \text{ 倍} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \text{ 軸成分} \\ \mathbf{e}_2 \text{ 軸成分} \end{bmatrix}$$

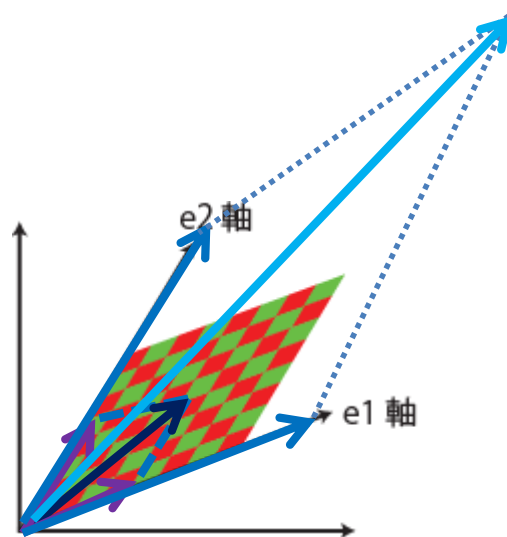


まとめると

行列 $\mathbf{T}$ の作用は次の3段階に分解できる.

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$$



固有値を対角成分に並べた行列を $\mathbf{T}$ と置く. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax} =$$



行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。
まず、2つの固有値を λ_1, λ_2 、固有ベクトルを e_1, e_2 とする。

2つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

$[e_1, e_2]$ を P 、固有値を対角成分に持つ行列を T と書き、左辺の P を右辺に移項すると

(こちらのほうが簡単！
この式が持つ意味は前述のとおり)



レポート課題（Ⅰ）

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

の作用について、 xy 平面上の点群($X=-3 \sim 3$, $Y=-3 \sim 3$)
がどのように移動するか、例と同様に試してみること

またこの移動が、固有ベクトル、固有値の観点から妥当
であることを確認すること



重要な応用： A^n

$$\begin{aligned} A^n \mathbf{x} &= (\mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1})^n \mathbf{x} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{T}^n \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \mathbf{T}^n &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行列の n 乗を簡単に計算することができる 

重要な結論： n が非常に大きくなった時の A^n

$$A^n \mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$$

行列の固有値 λ の絶対値が引き延ばしの倍率だから、

固有値の絶対値が

- 一つでも1より大きければ、 A^n は**発散**する
- 全て1より小さければ、 A^n は**0**に収束する



例： A^n

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 7 \quad \text{を代入して,}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= P T^3 P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 7^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \cdots = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる



ほとんどすべての行列は、
ベクトルを「引き延ばす」ものである (3)

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{の時は?} \dots \text{回転と習ったはず}$$

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$(\cos \theta - \lambda)(\cos \theta - \lambda) + \sin^2 \theta = 0$$



回転行列の固有値 = $\exp(j\theta)$

$$(\cos \theta - \lambda)(\cos \theta - \lambda) + \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2 + \sin^2 \theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2 \cos \theta \pm j \sqrt{4 \sin^2 \theta}}{2}$$

$$= \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$= \exp(\pm j\theta)$$



回転行列の固有ベクトル

$\cos \theta + j \sin \theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta - \cos \theta - j \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \cos \theta - j \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ &= \sin \theta \begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore u_x = j u_y \quad \mathbf{e}_1 = k \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{大きさを1とすれば例えば, } k = 1/\sqrt{2}$$

$\cos \theta - j \sin \theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\mathbf{e}_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \text{大きさを1とすれば例えば, } k = 1/\sqrt{2}$$



(参考)

回転行列も（拡張された）引き延ばしである

- 一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数.
- x, y 軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる.
- 複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す.



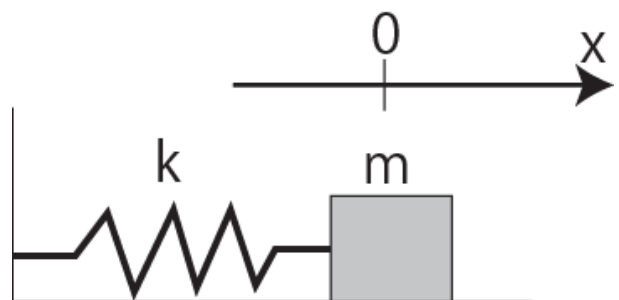
制御における行列

注意:ここで導入する行列は導入編用で, シミュレーションとしては不正確です.

おもりの挙動をシミュレートしたい

```
m=1.0; //重さ
k=1.0; //ばね定数
x=1.0; //初期位置
v=0;   //初期速度
dt=0.1; //時間刻み
record=[]; //記録用
```

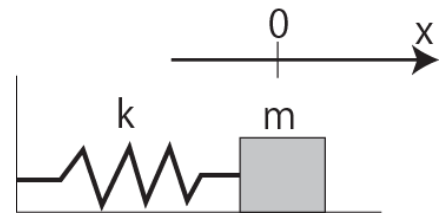
```
for time= 0:dt:10 //時刻
    F=-k*x;        //ばねによって生じる力
    a=F/m;         //生じる加速度
    v= v+a*dt;     //速度
    x= x+v*dt;     //位置
    record = [record,x]; //記録(※テクニック:ベクトルが伸びていく)
end
plot([0:dt:10],record);
```



制御における行列

```

for time= 0:dt:10           //時刻
    F=-k*x;                 //ばねによって生じる力
    a=F/m;                  //生じる加速度
    v= v+a*dt;              //速度
    x= x+v*dt;              //位置
end
    
```



位置, 速度, 加速度を並べた「状態ベクトル」 $\mathbf{x}$ を定義 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から, dt 時間後の新たな位置, 速度, 加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{x_{n-1}} \\ \phantom{v_{n-1}} \\ \phantom{a_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$



制御における行列

Scilabコード

```

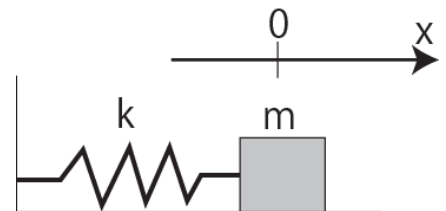
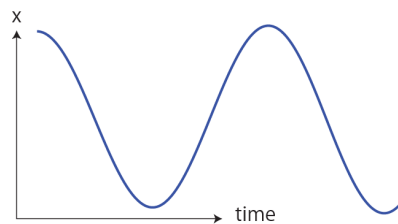
m=1.0; //重さ
k=1.0; //ばね定数
x=1.0; //初期位置
v=0; //初期速度
a=-k/m*x; //初期加速度
dt=0.01; //時間刻み
record=[]; //記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10 //時刻
    state= A*state;
    record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
    
```



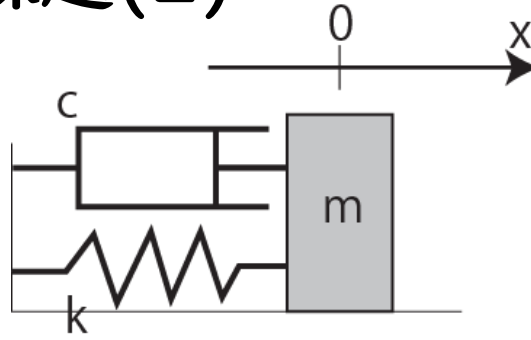
$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{n-1} = \dots = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

•行列 $\mathbf{A}$ の n 乗を使えば,
 n 時刻先の状態をシミュレート可能

•行列 $\mathbf{A}$ の固有値を見れば,
システムが将来($n=\infty$)収束するか
発散するか予測可能!



レポート課題(2)



- ダンパを加えた際の行列を考え、同様のシミュレーションプログラムを書け
- 行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと、すなわち位置が収束することを確認し、コメントに記せ (Scilabでは固有値は`spec()`で求められる)

注意:ここで導入した行列はあくまで導入編用で、シミュレーションとしては不正確です。

