

持ち込み不可

解答にあたっては答えのみ書くのではなく、式展開も書くこと。答えのみは0点とします。

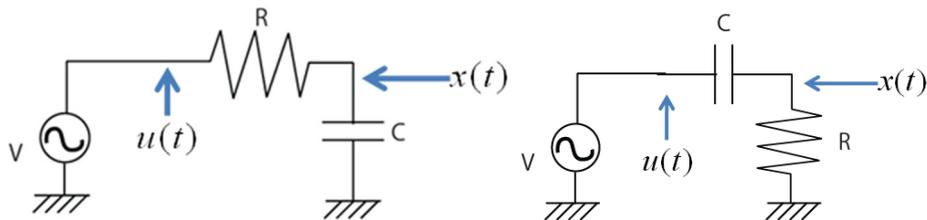
1 ラプラス変換

(1.1) 次の関数をラプラス変換せよ。ただし $f(t)$ は $t < 0$ では 0 である。

- (1) $f(t) = 1$
- (2) $f(t) = t$
- (3) $f(t) = t^2$ (前問の結果と、積分された関数のラプラス変換の公式を用いよ)
- (4) $f(t) = \sin(\omega t)$
- (5) $f(t) = \cos(\omega t)$ (前問の結果を用いても良い。)
- (6) $f(t) = \exp(\alpha t)$
- (7) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ (高さ 1, 幅 T のパルス)
- (8) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が既知の場合の $\dot{f}(t)$
- (9) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が既知の場合の $\int_0^t f(\tau) d\tau$
- (10) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が既知の場合の $f(t - \tau)$

(1.2) 以下それぞれのシステムの伝達関数を求め、ステップ入力を加えた際の出力を求め、図示せよ。

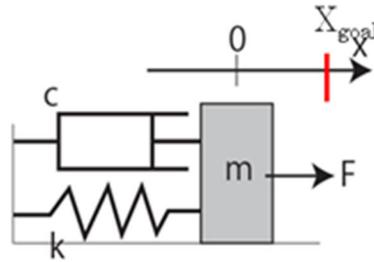
- (1) 抵抗 R とコンデンサ C によって構成されたローパスフィルタ(下図左)。入力を図の $u(t)$, 出力を図の $x(t)$ とする。
- (2) 抵抗 R とコンデンサ C によって構成されたハイパスフィルタ(下図右)。入力を図の $u(t)$, 出力を図の $x(t)$ とする。



(1.3) 前問の(1)で、幅 T , 高さ 1 のパルスを入力した場合の出力波形を求め、図示せよ。

2 制御

下图のシステムにおいて、おもりを目的地 x_{goal} に移動するために力 F を制御する。



- (1) おもりの運動を記述する運動方程式をたてよ
- (2) P 制御を行ったとき、システムが発振する条件を求めよ。
- (3) P 制御を行った時、 $t \rightarrow \infty$ の安定状態で目的地に達しないことを示せ。
- (4) PI 制御を行った時、 $t \rightarrow \infty$ の安定状態で目的地に達することを示せ。
- (5) ダンパ、質量、バネ定数を現実の半分と感じさせるための制御方法を述べよ。

3 行列

(3.1) 2×2 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 および固有ベクトル e_1, e_2 が与えられているとき、行列の対角化の式を導出せよ。

(3.2) 次の行列 A に関して下記の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

- (1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) 前問の結果を用いて対角化することで、 A^n を n を用いて表せ。
- (3) $n=4$ の場合に前問の解答が正しいことを確認せよ。

4 最小二乗法

(4.1) 次の式をもとに擬似逆行列 ($X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$) を導出せよ。ただし y は測定値、 a は求めたいパラメータ、 X は変換行列、 e は測定誤差を表す。

$$y = Xa + e$$

(4.2) 未知パラメータが 2 個の場合の擬似逆行列から直線フィッティングの公式を導け。

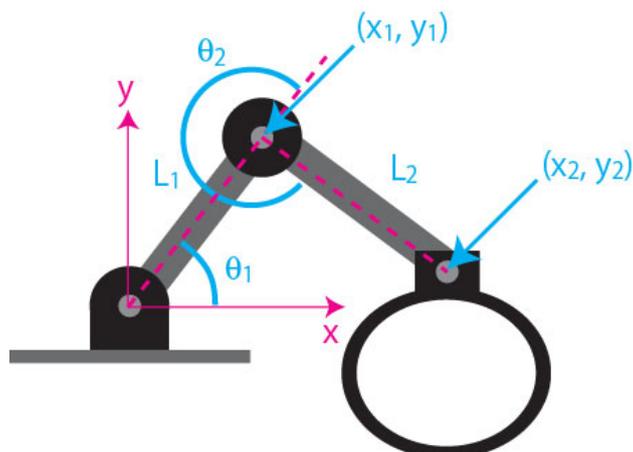
(4.3) 自動車の位置を計測した結果下の表のようになった。等速運動と仮定し、擬似逆行列を用いた直線フィッティングを行うことによりこの自動車の速度を求めよ。

時刻(s)	0	1	4	6
位置(m)	20	31	68	92

(4.4) 周波数が既知で振幅と位相が未知の信号 $y = A \sin(\omega t + \phi)$ を N 回計測し、計測データ $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ 得た。この計測データにノイズが含まれていることを仮定し、最小二乗法によるフィッティングで振幅 A と位相差 ϕ を求めるための式を導け。

5 ロボティクス

下図のロボットシステムに関して以下の問いに答えよ



- (5.1) 関節角 θ_1 , θ_2 が分かっているとき, 先端位置 x_2, y_2 を求めよ.
- (5.2) 関節角の速度 ω_1 , ω_2 が分かっているとき, 先端速度 v_{x2}, v_{y2} を求めよ.
- (5.3) 前問の結果からヤコビアンを求めよ.
- (5.4) 関節角 $\theta_1 = \pi/4$ (45度), $\theta_2 = 3\pi/2$ (270度) のとき, 先端に +y 方向 に 1 の力を出したい. $L_1 = L_2 = 1$ として, 各関節のモータが出力すべきトルクを求めよ.